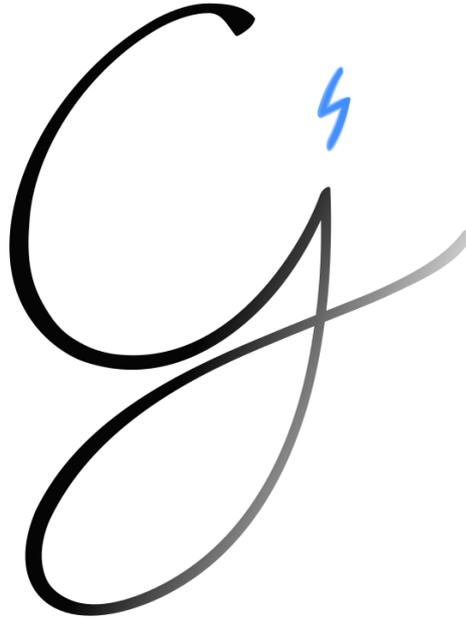


Captain Jonis

Theo1 "Skript"



# Contents

<b>1</b>	<b>Kinematik eines Massepunktes</b>	<b>4</b>
1.1	Massenpunkt und Ortsvektor	4
1.1.1	Vektoren	4
1.1.2	Einsteinsche Summenkonvention	4
1.1.3	Bahnkurve / Trajektorie	4
1.2	Geschwindigkeit und Beschleunigung	5
1.2.1	Differentialquotient / Ableitung	5
1.2.2	Geschwindigkeit	5
1.2.3	Beschleunigung	5
1.3	Mathe: Vektoralgebra	6
1.3.1	Betrag	6
1.3.2	Vektoren Normieren	6
1.3.3	Rechenregeln von Vektoren	6
1.3.4	Gruppe	6
1.3.5	Skalarprodukt	6
1.3.6	Kreuzprodukt	7
1.3.7	Lin unabhängigkeit und ONS	7
1.3.8	Levi-civita als KroneckerDeltas	8
1.3.9	Doppelkreuzprodukt	8
1.3.10	Spatprodukt	8
1.3.11	Tensoren	8
1.4	Vektoranalysis	10
1.4.1	Raumkurven	10
1.4.2	Parametrisierungen	10
1.4.3	Bogenlänge	10
1.4.4	Begleitendes Dreibein	10
1.4.5	Frenetsche Formeln / Krümmung / Torsion	12
1.5	Beschleunigung zur Bahnkurve	14
1.6	Geschwindigkeit und Acceleration im mitbewegten System	15
1.7	Koordinatensysteme	16
1.7.1	Skalarfeld	16
1.7.2	Kartesische Koordinaten	16
1.7.3	Zylinderkoordinaten	16
1.7.4	Kugelkoordinaten	16
1.7.5	Einheitsvektoren erhalten	17
1.7.6	Satz aus der Analysis	17
1.7.7	totale Ableitung	17
1.7.8	totales Differential	18
1.7.9	Nabla	18
1.7.10	Gradient	18
1.7.11	Jacobi Determinante	18
1.7.12	Satz der Umkehrabbildung	19
1.7.13	Koordinatentransformation	19
1.7.14	Verkettung von Koordtrafos	19
1.7.15	Lokales Dreibein der Koordinatensysteme	20
1.7.16	Volumenelement	20
1.7.17	Differentiale der Ortsvektoren	20
1.7.18	Nabla in krummlinieigen Koords	21
1.7.19	Vektorfeld	21
1.7.20	Divergenz	21
1.7.21	Rotation	21
1.7.22	Divergenz des Gradientenfeldes	21
1.7.23	Laplace	22
1.7.24	Divergenz in Krummlinigen Koordinaten	22
1.8	Geschwindigkeit und Acceleration in krummlinigen Koords	25

<b>2</b>	<b>Dynamik des Massepunktes</b>	<b>26</b>
2.1	Taylor-Entwicklung	26
2.1.1	Allgemeine Form (um die Null entwickelt)	26
2.1.2	Nützliche Taylor Reihen:	26
2.1.3	Entwicklung um beliebigen Punkt	26
2.2	Complexe Zahlen	27
2.2.1	Wichtige Trigonometrische Identitäten (für $\mathbb{C}$ )	27
2.3	Differentialgleichungen	28
2.3.1	Lösen von homogener DGL	28
2.3.2	Überprüfen der Lin. Unabhängigkeit	28
2.3.3	inhomogene DGL	29
2.3.4	Separation der Variablen	29
2.3.5	Steady State Lösung	29
2.3.6	DGLs zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten	30
2.4	Newtonsche Gesetze	31
2.5	Grundschemata der Klassischen Mechanik	32
2.6	Fallgesetzte	32
2.6.1	Freier Fall	32
2.6.2	Fall mit Stoke'scher Reibung	33
2.6.3	Fall mit Newton'scher Reibung	35
2.7	Der Harmonische Oszillator	36
2.7.1	Phasenraum für harm. Oszillator:	37
2.7.2	Gedämpfter harmn. Oszillator	38
2.7.3	Getriebener Harm Oszillator	41
2.7.4	Fadenpendel	43
2.8	Energie und Drehimpuls	44
2.8.1	Energie in einer Dimension (1D)	44
2.8.2	Beispiele für Energie in 1D	45
2.8.3	Energie in 3D	46
2.8.4	Drehimpuls in 3D	47
2.9	3-Keplergesetze	49
2.9.1	2tes Keplersches Gesetz.	50
2.9.2	1. Keplersches Gesetz	50
2.9.3	3.tes Keplersches Gesetzen	53
2.10	Annahme von Puntteilchen	54
<b>3</b>	<b>Mehrteilchensysteme</b>	<b>55</b>
3.1	Notation	55
3.2	Erhaltungssätze	55
3.2.1	Schwerpunktsatz	56
3.2.2	Impuls	56
3.2.3	Drehimpuls	56
3.2.4	Energie	57
3.2.5	Gesamtpotential	59
3.2.6	Virial	60
3.3	Zwei Teilchen Systeme	61
3.3.1	Bertrand Theorem	63
3.4	Zwei Teilchen Streuung	63
3.4.1	Notation	63
3.4.2	Impulserhaltung	63
3.4.3	Energieerhaltung bei einem 2K Stoß	64
3.4.4	Ruhendes Target	65
3.4.5	Impulsanalyse	66
3.4.6	Streuung am $1/r$ Potential	68
3.4.7	Streuquerschnitt	70
3.5	Gekoppelte Schwingung	72

# 1 Kinematik eines Massepunktes

## 1.1 Massenpunkt und Ortsvektor

### 1.1.1 Vektoren

Vektoren sind Elemente eines Vektorraums und lassen sich als Linearkombination einer entsprechenden Basis darstellen. In der Physik (gerade in PTP1) nutzen wir erstmal nur den  $\mathbb{R}^3$  mit der Standardbasis, des Kartesischen Koordinatensystems:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^3 x_i \vec{e}_i$$

Dabei sind  $\vec{e}_i$  die Basisvektoren im  $\mathbb{R}^3$

### 1.1.2 Einsteinsche Summenkonvention

Das bedeutet, wenn in einem Ausdruck indizes doppelt vorkommen, dann summieren wir über diese. Also könnte man  $\vec{r}$  auch so schreiben

$$\vec{r} = x_i \vec{e}_i$$

### 1.1.3 Bahnkurve / Trajektorie

Die sogenannte Trajektorie ist global, die physikalischen Gesetze sind i.d.R lokal.

Die Trajektorie ist die Menge aller Punkte, die ein Massepunkt, dessen Ort mit  $\vec{r}(t)$  beschrieben wird, in der Zeit  $t$  durchquert.

Es gilt also:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^3 x_i(t) e_i$$

Beachten sollte man dabei, dass die Einheitsvektoren nicht Zeitabhängig sind, sondern nur die Komponenten des Vektors

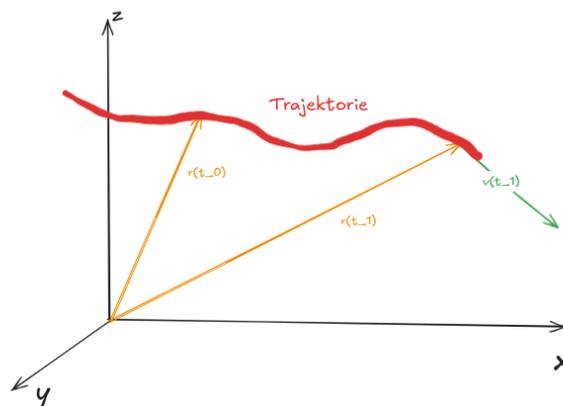


Figure 1: Trajektorie

**Wichtiges:**

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^3 x_i(t) e_i$$

## 1.2 Geschwindigkeit und Beschleunigung

### 1.2.1 Differentialquotient / Ableitung

Das Konzept des Differentialquotient lässt sich auch auf Vektoren anwenden. D.h. die Ableitung eines Vektors, zum Beispiel nach der Zeit, könnte man so formulieren:

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

Die Ableitung funktioniert Komponentenweise, also gilt:

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \\ \frac{dx_3(t)}{dt} \end{pmatrix}$$

### 1.2.2 Geschwindigkeit

Die so erhaltene Ableitung des Ortsvektors ist der Geschwindigkeitsvektor, dieser Zeit in die Richtung der Bewegung (Tangentialvektor).

$$\dot{\vec{r}}(t) = \vec{v}(t)$$

### 1.2.3 Beschleunigung

Die Beschleunigung erhält man durch Differenzieren des Geschwindigkeitsvektors:

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \vec{a}(t)$$

#### **Wichtiges:**

Die Ableitungen von Vektoren erfolgen Komponentenweise

## 1.3 Mathe: Vektoralgebra

### 1.3.1 Betrag

Ein Vektor hat eine Richtung und einen Betrag, den Betrag errechnen wir mithilfe von Pythagoras mithilfe folgender Formel:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Wir schreiben von nun an nichtmehr  $|\vec{a}|$ , sondern lassen den Vektorpfeil weg. Also:

$$|\vec{a}| = a$$

### 1.3.2 Vektoren Normieren

Man kann aus jedem Vektor einen Einheitsvektor (also einen Vektor mit der Länge 1) erhalten, indem man den Vektor durch seinen Betrag teilt.

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

Wenn Vektoren Normiert sind nutzt man das Dach  $\hat{a}$ . Wenn wir allerdings ein e schreiben, ersetzt die Notation des e's , das Dach. Also e sind immer Normierte Basisvektoren

### 1.3.3 Rechenregeln von Vektoren

Vektoren können addiert, subtrahiert und skaliert werden. Dies geschieht **komponentenweise**  
**Dabei ist die Addition kommutativ und assoziativ**

Es gilt also:  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

Und weiter gilt:  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

### 1.3.4 Gruppe

Eine Gruppe ist eine mathematische Struktur, welche folgende Dinge erfüllen muss:

1. Abgeschlossenheit
2. Assoziative Verknüpfung
3. Neutrales Element
4. Jedes Elemente hat ein Inverses

Die Vektoren bilden hierbei also mathematisch gesehen eine Gruppe.

Merkwort dafür ist "GANI"

### 1.3.5 Skalarprodukt

Das Skalarprodukt ist eine Verknüpfung von Vektoren, die nur ein Skalar ausspuckt. Dabei ist dieser Skalar eine Projektion der Vektoren aufeinander.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos \theta$$

Man schreibt für das Skalarprodukt auch:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$$

Man berechnet es durch die Addition der Komponentenweisen Multiplikation, also:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

**Eigenschaften:**

1. Das Skalarprodukt ist Distributiv:  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$
2. Wenn das Skalarprodukt Null ist, dann stehen die Vektoren senkrecht aufeinander (siehe  $\cos \theta = 90^\circ$ )
3.  $\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2 \Rightarrow a = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$
4. Man kann Winkel zwischen Vektoren messen:  $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a \cdot b}$

Man kann es auch eleganter schreiben:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left( \sum_i a_i e_i \right) \cdot \left( \sum_j b_j e_j \right) = \sum_{i,j} a_i b_j \delta_{i,j} = \sum_i a_i b_i$$

Hier wurde das Kronekerdelta eingeführt, welches sich wie folgt zusammensetzt:

$$e_i \cdot e_j = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } i=j \\ 0, & \text{wenn } i \neq j \end{cases}$$

Dies gilt, weil alle Einheitsvektoren  $e_i$  eine Orthonormalbasis bilden, das heißt alle Basisvektoren stehen senkrecht aufeinander. Wenn ich nun einen Vektor mit einem ihm senkrechten Vektor Multipliziere ist der Winkel  $90^\circ$  und damit das Skalarprodukt Null, also interessieren uns die Summanden der  $e_i \cdot e_j$  wenn  $i \neq j$  ist nicht, weil Sie sowieso mit 0 multipliziert werden.

### 1.3.6 Kreuzprodukt

Das Kreuzprodukt baut aus zwei Vektoren einen neuen Vektor, der senkrecht auf beiden steht.

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

#### Eigenschaften:

1. Der Betrag c ist der Flächeneinhalt, des a,b-Parallelogramm:  $c = ab \sin \theta$
2.  $\vec{c}$  steht senkrecht auf  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$
3. Antikommutativ:  $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
4. Wenn  $\vec{c} = 0$ , dann sind  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  kollinear. (Schauen in die gleiche Richtung)
5. Distributiv:  $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$
6. **Nicht** Assoziativ:  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$

Man kann das Kreuzprodukt auch weider Fancy schreiben als:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left( \sum_i a_i e_i \right) \times \left( \sum_j b_j e_j \right) = \sum_{i,j,k} a_i b_j \epsilon_{ijk} e_k$$

Dabei wurde das **Levi-Civita Symbol** eingeführt, welches wie folgt agiert:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } (i,j,k) \text{ zyklisch zu } (1,2,3) \\ -1 & \text{wenn } (i,j,k) \text{ antizyklisch zu } (1,2,3) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Das Levi-Civita Symbol ist ein komplett antisymmetrischer Tensor dritter Stufe.

### 1.3.7 Lin unabhängigkeit und ONS

Vektoren  $\vec{a}_i$  (nicht die i-te Komponente des Vektors a, sondern n verschiedenen a-Vektoren und wir nehmen den i-ten a Vektor) sind Linear unabhängig wenn gilt:

$$\sum_i^n \alpha_i a_i = 0 \text{ nur dann wenn } \forall \alpha_i = 0$$

Die Dimension des Raums ist gleich der Kardinalität einer Basis.

Im Besten Fall konstruiert man einen Orthonormalsystem (ONS), also dass die Vektoren "senkrecht" aufeinander stehen und gilt:

$$e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$$

### 1.3.8 Levi-civita als KroneckerDeltas

Man kann das Levi-Civita-Symbol auch komplett mit Kronnerkterdelta ausdrücken:

$$\epsilon_{klm} = \delta_{k1}(\delta_{l2}\delta_{m3} - \delta_{l3}\delta_{m2}) + \delta_{k2}(\delta_{l3}\delta_{m1} - \delta_{l1}\delta_{m3}) + \delta_{k3}(\delta_{l1}\delta_{m2} - \delta_{l2}\delta_{m1}) \quad (1)$$

$$= \det \begin{pmatrix} \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \\ \delta_{l1} & \delta_{l2} & \delta_{l3} \\ \delta_{m1} & \delta_{m2} & \delta_{m3} \end{pmatrix} \quad (2)$$

### 1.3.9 Doppelkreuzprodukt

Es gibt weiterhin das Doppelkreuzprodukt, welches wir mit der BacCab Regel umschreiben können:

$$a \times (b \times c) = b(a \cdot c) - c(a \cdot b)$$

### 1.3.10 Spatprodukt

Der Betrag des Spatproduktes ist das Volumen des Parralelepipeds, welches von diesen 3 Vektoren aufgespannt wird.

$$a \cdot (b \times c) = \sum_{i,j,k} \epsilon_{i,j,k} a_i b_j c_k$$

### 1.3.11 Tensoren

– kommt später wenns iwann wichtig wird —

**Wichtiges:**  
**Betrag Vektoren**

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

**Normierung**

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

**Skalarprodukt**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos \theta$$

**Eigenschaften:**

1. Distributiv:  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$
2. Wenn  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$
3.  $\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2 \Rightarrow a = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$
4. Winkel messen:  $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a \cdot b}$

**KroneckerDelta**

$$e_i \cdot e_j = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } i = j \\ 0, & \text{wenn } i \neq j \end{cases}$$

**Kreuzprodukt**

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

**Eigenschaften:**

1.  $c = ab \sin \theta$
2.  $\vec{c}$  steht senkrecht auf  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$
3. Antikommutativ:  $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
4. Distributiv:  $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$
5. **Nicht** Assoziativ:  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$

**Levi-CivitaSymbol**

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } (i,j,k) \text{ zyklisch zu } (1,2,3) \\ -1 & \text{wenn } (i,j,k) \text{ antizyklisch zu } (1,2,3) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

**BacCab**

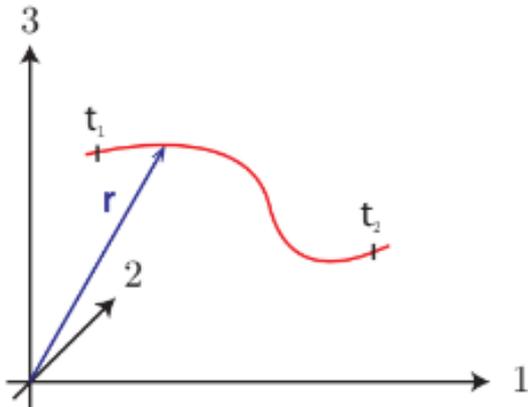
$$a \times (b \times c) = b(a \cdot c) - c(a \cdot b)$$

## 1.4 Vektoranalysis

### 1.4.1 Raumkurven

Eine Raumkurve ist eine Menge an Punkten, nämlich genau die Punkte, die von einer Vektorwertigen Funktion von der Zeit erreicht werden, also:

$$\text{Raumkurve} = \{\vec{r}(t) | t_1 \leq t \leq t_2\}$$



### 1.4.2 Parametrisierungen

– maö genauer schauen was wichtig ist –

Fehlt Bisher – genau anschauen

### 1.4.3 Bogenlänge

Die Bogenlänge ist die tatsächliche Länge der Kurve und ist gegeben durch:

$$L = \int_{t_0}^{t_n} dt \left| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right|$$

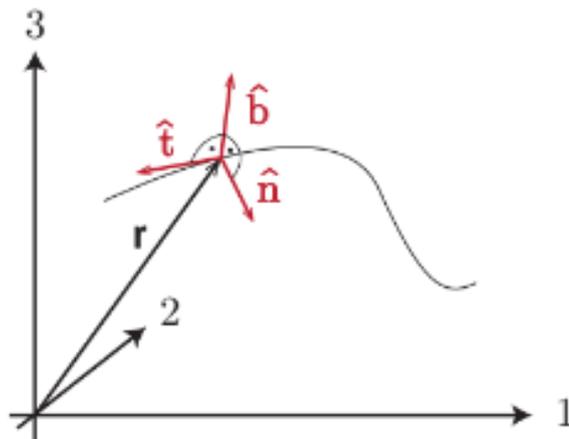
Wichtig ist, dass die Bogenlänge unabhängig der gewählten Parametrisierung ist.

Es gilt also für  $t = t(u)$ :

$$L = \int dt \left| \frac{d\vec{r}(t(u))}{dt} \right| = \int dt \left| \frac{d\vec{r}(t(u))}{du} \right| \left| \frac{du}{dt} \right| = \int du \left| \frac{d\vec{r}(u)}{du} \right|$$

### 1.4.4 Begleitendes Dreibein

Das begleitende Dreibein ist ein Koordinatensystem, welches sich zusammen mit dem Ortsvektor entlang einer Raumkurve bewegt. Zu jedem Zeitpunkt ist das Koordinatensystem also anders (sofern die Raumkurve über die Zeit parametrisiert ist).



Wir definieren die neuen Einheitsvektoren in diesem Koordinatensystem mit

$$\begin{aligned}\hat{t} & \text{ Tangentialeinheitsvektor} \\ \hat{n} & \text{ Normaleneinheitsvektor} \\ \hat{b} & = \hat{t} \times \hat{n} \text{ Binormaleneinheitsvektor}\end{aligned}$$

### Tangentialeinheitsvektor

Dieser schaut immer in Richtung des Geschwindigkeitsvektors an einem Punkt, durch Normieren erhält man dann  $\hat{t}$ :

$$\hat{t} = \frac{\frac{d\vec{r}}{dt}}{\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|} = \frac{\dot{\vec{r}}}{\frac{ds}{dt}}$$

Da der Betrag des Geschwindigkeitsvektors  $\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|$  gerade die zeitliche Änderung der Bogenlänge als Skalar ist, also  $\frac{ds}{dt}$

Wenn wir nun mit der Bogenlänge parametrisieren, also aus  $\vec{r}(t) \rightarrow \vec{r}(s(t))$ , dann erhalten wir nach der Kettenregel folgenden Ausdruck:

$$\hat{t} = \frac{\frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{d\vec{r}}{ds}$$

Da  $\hat{t}$  ein Einheitsvektor ist, hat er die Länge 1, also kann man schreiben:  $\hat{t} \cdot \hat{t} = 1$ , daraus folgt, dass die Ableitung dieses Vektors senkrecht auf ihm steht:

$$\hat{t} \cdot \frac{d\hat{t}}{ds} = \frac{d1}{ds} = 0$$

(Skalarprodukt von  $\hat{t}$  mit seiner Ableitung ergibt Null  $\rightarrow$  Senkrecht)

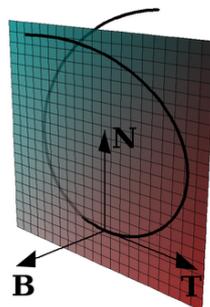
### Normaleneinheitsvektor

Wir definieren den Normalenvektor als die Ableitung des Tangentialvektors nach der Bogenlänge:

$$\hat{n} = \frac{\frac{d\hat{t}}{ds}}{\left|\frac{d\hat{t}}{ds}\right|}$$

Diese beiden Vektoren spannen eine Ebene auf, die sich Schmiegeebene nennt.

Die "Rotation" des Normalenvektors ist festgelegt durch den "Verlauf" der Bahnkurve. Gehe ich also ein  $ds$ -Stück entlang der Bahnkurve, so sollte der Normaleneinheitsvektor immernoch in der Schmiegeebene liegen. Er zeigt also immer zum Kreismittelpunkt des 2D-Kreises (Schmiegekreis), der die Krümmung definiert, wie man auf folgender Graphik erkennen kann.



### Binormaleneinheitsvektor

Da wir bereits 2 lin. unabhängige Vektoren haben, bekommen wir den 3ten durch das Kreuzprodukt:

$$\hat{b} = \hat{t} \times \hat{n}$$

### 1.4.5 Frenetsche Formeln / Krümmung / Torsion

Im allgemeine Fall ändert sich die Richtung der Vektoren im Dreibein, je nachdem wo/wann sie betrachtet werden. Wir können hierfür die Krümmung einer Raumkurve definieren (wie stark ändert sich der Tangentialeinheitsvektor pro Bogenlängenstück). Also:

$$\left| \frac{d\hat{t}(s)}{ds} \right| = \kappa(s)$$

Der Krümmungsradius ist der Radius eines gedachten Kreises, dessen Umfang, die Krümmung an diesem Punkt definiert:

$$\rho = \frac{1}{\kappa}$$

Es gilt folgender weiterer Zusammenhang:

$$\frac{d\hat{t}}{ds} = \kappa \cdot \hat{n}$$

Weiternoch gibt es auch die Torsion, die man sich die die Krümmung aus der Schmiegeebene heraus vorstellen kann, also wie stark ändert sich der Binormalenvektor bezüglich der Bogenlänge.

$$\frac{d\hat{b}}{ds} = -\tau \hat{n}$$

Leiten wir den Normalenvektor nach der Bogenlänge erhalten wir:

$$\frac{d\hat{n}}{ds} = \tau \hat{b} - \kappa \hat{t}$$

Es gibt noch weitere Formeln um  $\kappa$  und  $\tau$  auszurechnen.

$$\kappa = \frac{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3}$$
$$\tau = \frac{\det(\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}})}{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|^2} = \frac{\dot{\vec{r}} \cdot (\ddot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}})}{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|^2}$$

**Wichtiges:  
Bogenlänge**

$$L = \int_{t_0}^{t_n} dt \left| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right|$$

**Dreibein**

$$\hat{t} = \frac{\frac{d\vec{r}}{dt}}{\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|} = \frac{\dot{\vec{r}}}{\frac{ds}{dt}}$$
$$\hat{n} = \frac{\frac{d\hat{t}}{ds}}{\left| \frac{d\hat{t}}{ds} \right|}$$
$$\hat{b} = \hat{t} \times \hat{n}$$

**Frenetsche Formeln**

$$\left| \frac{d\hat{t}(s)}{ds} \right| = \kappa(s)$$
$$\rho = \frac{1}{\kappa}$$
$$\frac{d\hat{t}}{ds} = \kappa \cdot \hat{n}$$
$$\frac{d\hat{b}}{ds} = -\tau \hat{n}$$
$$\frac{d\hat{n}}{ds} = \tau \hat{b} - \kappa \hat{t}$$
$$\kappa = \frac{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3}$$
$$\tau = \frac{\det(\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}})}{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|^2} = \frac{\dot{\vec{r}} \cdot (\ddot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}})}{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|^2}$$

## 1.5 Beschleunigung zur Bahnkurve

Um eine Bahnkurve von einer gegebenen Beschleunigung zu erhalten integrieren wir (bei Vektoren komponentenweise) und setzen die Anfangsbedingung accordingly.

## 1.6 Geschwindigkeit und Acceleration im mitbewegten System

In dem mitbewegten system kann man die Geschwindigkeitsvektor als skalar schreiben und dann mit dem Tangentialeinheitsvektor multiplizieren, da dieser ja immer in diese richtung zeigt.

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} \stackrel{\text{Parametrisierung nach Weg}}{=} \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \hat{t} \cdot v$$

Der Beschleunigungsvektor ist die Zeitableitung des Geschwindigkeitsvektors:

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}(\hat{t} \cdot v) = \frac{d\hat{t}}{dt} v + \hat{t} \dot{v} \quad \text{dann Wegparametrisierung} \quad (3)$$

$$= \frac{d\hat{t}}{ds} \frac{ds}{dt} v + \hat{t} \dot{v} \stackrel{\text{Frenet}}{=} v^2 \kappa \hat{n} + \dot{v} \hat{t} \quad (4)$$

Man kann die Beschleunigung also in den Tangentialteil und den Normalteil aufspalten mit:

$$\vec{a}(t) = a_t \hat{t} + a_n \hat{n}$$

$$a_t = \dot{v}$$

$$a_n = \kappa v^2$$

Eine Bewegung kann also trotz der Tatsache, dass  $\dot{v} = 0$  gilt, beschleunigt sein, dann aber eben nur in  $\hat{n}$  Richtung.

**Wichtiges:**  
Beschleunigung im Mitbewegten sytem

$$\vec{a}(t) = a_t \hat{t} + a_n \hat{n}$$

$$a_t = \dot{v}$$

$$a_n = \kappa v^2$$

## 1.7 Koordinatensysteme

### 1.7.1 Skalarfeld

Ein Skalarfeld ist eine Skalare Funktion, dessen Input ein Vektor ist.  $V^n \rightarrow K$ , dabei ist  $V$  der Vektorraum und  $K$  der Skalarkörper.

$$f(\vec{r}) = \vec{a} \cdot \vec{r}$$

Dies wäre nur ein Beispiel, der Input ist ein Vektor  $\vec{r}$  und der Output ist ein Skalar!

### 1.7.2 Kartesische Koordinaten

Hier sieht ein Vektor so aus:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Man gibt z.B. einen Punkt so an  $P_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$

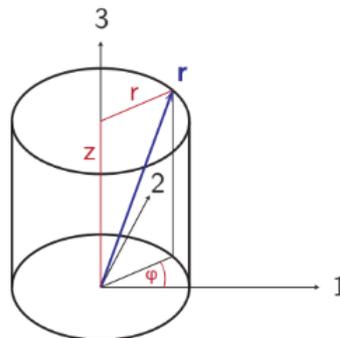
### 1.7.3 Zylinderkoordinaten

In Zylinderkoordinaten, sind die jeweiligen Komponenten um einen Punkt zu beschreiben keine reine Distanzen mehr, sondern Distanzen und Winkel. Man gibt einen Punkt  $P_1 = \{\rho, \varphi, x_3\}$  also mit dem Abstand  $\rho$ , dem Winkel  $\varphi$  und der gleichbleibenden  $x_3$  Komponenten. Um am selben Punkt  $P_1$  im 3D Raum anzukommen gilt für einen Ortsvektor:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \rho \cos(\varphi) \\ \rho \sin(\varphi) \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Man erkennt also, dass die  $x_1$ -Komponente in Kartesischen Koordinaten dargestellt werden kann als

$$x_1 = \rho \cos(\varphi)$$



In den Zylinderkoordinaten gibt es auch entsprechende Einheitsvektoren.

$$e_\rho = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

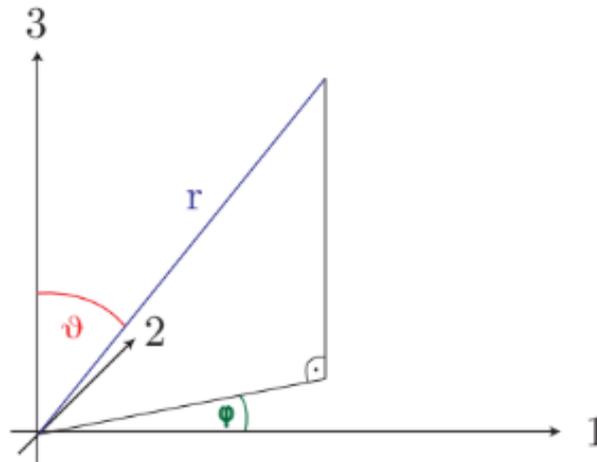
$$e_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

### 1.7.4 Kugelkoordinaten

In Kugelkoordinaten beschreibt man einen Punkt nur mit zwei Winkel und seinem Abstand zum Ursprung  $P_1 = \{\varphi, \theta, r\}$ , der jeweilige Vektor im Kartesischen System sieht also so aus:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Dabei ist  $\varphi$  der Winkel von der  $x_1$  Achse heraus und  $\theta$  der Winkel aus der  $x_3$  Achse.



Eine Umkehrung muss in (fast) jedem Punkt (lokal) umkehrbar sein. Also eindeutig sein.  
Die Einheitsvektoren in Kugelkoordinaten sind:

$$e_r = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$e_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}$$

$$e_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

### 1.7.5 Einheitsvektoren erhalten

Gegeben sei ein Vektor  $\vec{r}$ , der in anderen Abhängigkeiten die Korrdinate  $x_1, x_2, x_3$  beschreibt. Also  $x_i = f_i(q_1, q_2, q_3)$  Dabei ist  $f$  ein Skalarfeld und  $q_i$  die Neuen Komponenten.  
Wenn man das gegeben hat kann man die einzelnen Partiellen Ableitungen bilden.

$$b_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$$

Wenn man dann die  $b_i$  noch normiert erhält man die neuen Einheitsvektoren  $\vec{e}_{q_i}$

### 1.7.6 Satz aus der Analysis

Gemische parteille Ableitungen sind vertauschbar, es gilt also:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}$$

### 1.7.7 totale Ableitung

Wir definieren die Totale Ableitung eines Skalarfeldes, wobei  $f$  unser Skalarfeld ist.

$$\frac{df}{dt}$$

Aber da  $f$  ein Skalarfeld ist, also zu einem gewissen Punkt einen Skalar zuordnen, können wir keine zeitliche Änderung definieren, da die Zeitdimension in einem Skalarfeld selbst nicht von Relevanz ist. Also müssen wir uns entlang einer Bahnkuve  $\vec{r}(t)$  innerhalb des Skalarfeldes bewegen, sodass eine zeitliche Änderung Sinn ergibt. (Zeit vereht beim entlanglaufen der Bahnkuve)

$$\frac{df}{dt} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \nabla f \cdot \dot{r}$$

### 1.7.8 totales Differential

Das totale Differential lässt die Abhängigkeit der Bahnkurve die wir wählen wieder verschwinden und gibt an, wie sich der Skalar in seinem infinitesimalen Inkrement  $df$  ändert, wenn man eine der argumente infinitesimal verändert.

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = \nabla f \cdot d\vec{r}$$

### 1.7.9 Nabla

Nabla ist ein Differentialoperator, der nach rechts wirkt.

$$\nabla = \sum_i e_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Man beachte, dass der Einheitsvektor diesmal direkt hinter dem Summenzeichen steht. Das macht man um Missverständnisse zu vermeiden, da der Differenzialoperator  $\frac{d}{dx_i}$  nicht auf das  $e_i$  wirkt sondern auf das worauf Nabla wirkt.

### 1.7.10 Gradient

Der Gradient eines Skalarfeldes (oder skalaren Funktion) ist der Vektor, der als i-te Komponente die Partielle Ableitung der Funktion nach  $x_i$  hat. Also Nabla angewandt.

Sei  $f(x_1, x_2, x_3)$  ein Skalarfeld, dann ist der Gradient dieses Skalarfeldes:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

Der Gradient ist also ein Vektor. Dieser zeigt immer in Richtung des stärksten Anstiegs.

Achtung: Die Begriffe "Gradient zeigt in Richtung des stärksten Anstiegs" und "Gradient zeigt dorthin, wo die Ableitung maximal ist" meinen nicht dasselbe: Der Gradient zeigt in die Richtung, in der die Funktion  $f(x_1, x_2, x_3)$  lokal am schnellsten zunimmt. Diese Richtung ist eine rein geometrische Eigenschaft des Feldes  $f$  und hängt nicht davon ab, wie stark die Änderungsrate (Betrag des Gradienten) ist.

### 1.7.11 Jacobi Determinante

Bei Koordinatentransformationen spielt die Jacobi Determinante eine wichtige Rolle.

Um dies aber zu verstehen brechen wir alles nochmal einzeln herunter: Wir haben Komponenten in unserem Koordinatensystem  $q_i$  und wollen von unserem Koordinatensystem wieder zurück in das Kartesische Koordinatensystem kommen. Also:

Ursprüngliches System mit Komponenten  $q_i$   $\xrightarrow{\text{transformation}}$   $x_i$  Kartesische Koordinaten

Also zum Beispiel bei Kugelkoordinaten:  $(r, \varphi, \theta) \rightarrow (x_1, x_2, x_3)$  Dann kennen wir bereits die Skalaren Funktionen, die von  $r, \varphi, \theta$  abhängen und uns die Komponenten im Kartesischen System geben.

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}$$

D.h.  $x_i$  ist eine skalare Funktion:  $x_i(r, \varphi, \theta)$  Im Allgemeinen sind die "neuen" Komponenten  $x_i$  also Skalarfelder von den alten Komponenten  $x_i(q_1, q_2, q_3)$ . Wenn wir also wissen wollen, wie wir Koordinaten sinnvoll transformieren können, müssen wir uns fragen, wie verändert sich die Komponente  $x_i$ , wenn ich an den  $q_i$  kleine Veränderungen mache.

Dies finden wir genau über das totale Differential heraus. Man kann den ganzen Vektor  $dx_i$  nun ausschreiben als:

$$\begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} & \frac{\partial x_1}{\partial q_2} & \frac{\partial x_1}{\partial q_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial q_1} & \frac{\partial x_2}{\partial q_2} & \frac{\partial x_2}{\partial q_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial q_1} & \frac{\partial x_3}{\partial q_2} & \frac{\partial x_3}{\partial q_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dq_1 \\ dq_2 \\ dq_3 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix, die infinitesimale Änderungen des einen Systems in das der anderen überresetzt, nennen wir Jacobi-Matrix. Deren Determinante uns Auskunft über die Invertierbarkeit der transformation aussagt.

### 1.7.12 Satz der Umkehrabbildung

Sei  $A$  eine Matrix, die Darstellungsmatrix eines Endomorphismus ist. Dann existiert  $A^{-1}$  genau dann wenn  $\det(A) \neq 0$ .

$\Rightarrow$  Ist die Jacobideterminante ungleich Null so ist eine Umkehrung der Transformation möglich.

### 1.7.13 Koordinatentransformation

Wenn nur nun einen Vektor gegeben haben, der in Kartesischen Koordinaten angegeben ist. Also

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \sum x_i e_i$$

Und wir diesen Vektor umschreiben wollen in einem anderen Koordinatensystem, also von  $e_i$  zu neuen Einheitsvektoren  $e'_i$ . Um nun von den Komponenten  $x_i$  zu den neuen Komponenten  $y_i$  zu kommen, um den Vektor  $\vec{r}$  schreiben zu können als:

$$\vec{r} = \sum y_i e'_i$$

Dazu müssen wir die Einheitsvektoren  $e'_i$  wissen. (Und wie wir davor gesehen haben, die  $e'_i$  sind Vektoren, die als Komponenten skalare Funktionen haben, die die neuen Koordinaten in die alten übersetzt. (z.B.  $x_1 = \cos \varphi$ ))

Um also die einzelnen Komponenten  $y_i$  herauszufinden, müssen wir den ursprünglichen Vektor mit den neuen Einheitsvektoren multiplizieren (Projektion), wir erhalten dann also den Anteil des  $\vec{r}$  Vektors in  $e'_i$ -Richtung.

$$y_i = \vec{r} \cdot e'_i$$

### 1.7.14 Verkettung von Koordtrafos

Stellen wir uns vor gehen einen Umweg über ein anderes Koordinatensystem:

$$z_i \rightarrow q_i \rightarrow x_i$$

Dann ist  $x_i(q_1(z_1, z_2, z_3), q_2(z_1, z_2, z_3), q_3(z_1, z_2, z_3))$  Dann interessiert und das "wackeln" an den  $z_i$  Werten und wie es sich auf  $x_i$  auswirkt. Wir betrachten zuerst das totale Differential von  $x_i$ , welches die Änderung von  $x_i$  beschreibt, wenn man an  $q_i$  wackelt

$$dx_i = \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial q_j} dq_j$$

Allerdings hängt  $q_j$  ja von  $z_m$  ab. D.h. wenn wir an  $z_m$  wackeln ändert das  $dq_j$  und damit dann auch  $dx_i$ . Wir setzen zusammen:

$$\begin{aligned} dx_i &= \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \left( \sum_m \frac{\partial q_j}{\partial z_m} dz_m \right) \\ &= \sum_m \left( \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial z_m} \right) dz_m \end{aligned}$$

Schauen wir uns jetzt die Partielle Ableitung nur nach einem bestimmten  $z_m$  an, so fällt die Summe über  $m$  weg und wir erhalten für die Partielle Ableitung hier:

$$\frac{\partial x_i}{\partial z_m} = \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial z_m}$$

Daraus folgt, dass die Jacobimatrix  $J_{z \rightarrow x}$  die Multiplikation der einzelnen Jacobimatrizen ist.

$$J_{z \rightarrow x} = J_{z \rightarrow q} \cdot J_{q \rightarrow x}$$

Und daraus folgt, dass jede einzelne Transformation umkehrbar sein muss, damit die gesamte Transformation umkehrbar ist.

### 1.7.15 Lokales Dreibein der Koordinatensysteme

Redundant, siehe 1.7.5.

Sei nun wieder ein "Koordinatensystem" gegeben, indem die jeweiligen Skalarfelder Funktionen in den Komponenten eines Kartesischen Vektor steht, also:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x_1(y_1, y_2, y_3) \\ x_2(y_1, y_2, y_3) \\ x_3(y_1, y_2, y_3) \end{pmatrix}$$

Dabei sind die  $y_i$  die neuen Koordinatenvariablen bsp. Kugelkoords:  $(r, \varphi, \theta)$

Dieses neue Koordinatensystem definiert im Raum (abhängig von den expliziten  $y_i$ , ein Lokales Dreibein), also Einheitsvektoren, die alle Senkrecht aufeinander stehen.

Für diese Einheitsvektoren des lokalen Dreibeins gilt:

$$e_{y_i} = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial y_i}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial y_i} \right|} = \frac{1}{b_{y_i}} \frac{\partial \vec{r}}{\partial y_i} \quad \text{mit } b_{y_i} = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial y_i} \right|$$

### 1.7.16 Volumenelement

Das neue lokale Dreibein spannt ein lokales Volumenelement  $dV$  auf. Hierbei können wir allerdings nicht einfach die Einheitsvektoren anschauen, da diese ja die Länge 1 haben und dann das Volumen  $dV$  auch einfach nur 1 wäre.

Uns interessiert das infinitesimale Volumenelement  $dV$ , des Parallelepipedes, welches aufgespannt wird, von den einzelnen Vektoren, des Dreibeins, allerdings wollen wir die Richtung des Vektors, also  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial y_i}$  und die Länge des Vektors. Diese wollen wir aber infinitesimal halten, da wir ja auch das  $dV$  Volumen wollen. Also multiplizieren wir den Vektor  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial y_i}$  noch mit der infinitesimalen Länge in  $y_i$ -Richtung.

Also sind die Vektoren, die uns das Parallelepiped aufspannen:

$$\vec{a}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial y_i} dy_i$$

Das kann man aber umschreiben, mithilfe unserer neu Definierten Einheitsvektoren, als:

$$\vec{a}_i = b_{y_i} e_{y_i} dy_i$$

Nun schauen wir uns das Volumen an: (Erinnerung, das Volumen, welches von 3 Vektoren aufgespannt wird rechnen wir mit Kreuz und Dot Produkt aus) (Der Vektor  $\vec{r}$  besteht ja aus,  $x_1, x_2, x_3$ )

$$\begin{aligned} dV &= \vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3) \\ &= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} dy_1 & \frac{\partial x_2}{\partial y_1} dy_1 & \frac{\partial x_3}{\partial y_1} dy_1 \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_2} dy_2 & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} dy_2 & \frac{\partial x_3}{\partial y_2} dy_2 \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_3} dy_3 & \frac{\partial x_2}{\partial y_3} dy_3 & \frac{\partial x_3}{\partial y_3} dy_3 \end{pmatrix} \stackrel{\text{Rechenregeln zur Det}}{=} J dy_1 dy_2 dy_3 \\ &= b_{y_1} b_{y_2} b_{y_3} dy_1 dy_2 dy_3 \end{aligned}$$

Skalare Faktoren können Zeilenweise aus der Determinante herausgezogen werden!

$$J = b_{y_1} b_{y_2} b_{y_3}$$

### 1.7.17 Differentiale der Ortsvektoren

Wir können damit nun auch die Differentiale der Ortsvektoren schöner beschreiben:

$$d\vec{r} = \sum_i \frac{\partial \vec{r}}{\partial y_i} dy_i = \sum b_{y_i} dy_i e_{y_i}$$

Damit ergibt sich für die bisher bekannten Koordinaten:

$$\text{Polarkoordinaten: } d\vec{r} = dr e_r + r d\varphi e_\varphi$$

$$\text{Zylinderkoordinaten: } d\vec{r} = dr e_r + r d\varphi e_\varphi + dz e_z$$

$$\text{Kugelkoordinaten: } d\vec{r} = dr e_r + r d\theta e_\theta + r \sin \theta d\varphi e_\varphi$$

### 1.7.18 Nabla in krummlinieigen Koords

Nabla leitet ein Skalarfeld in alle Raumrichtungen ab. Diese Raumrichtungen sind aber nun "versteckt", deswegen muss Nabla dementsprechend angepasst werden:

$$\nabla = \sum_i e_{y_i} \frac{1}{b_{y_i}} \frac{\partial}{\partial y_i}$$

Im Schwartz Skript findet sich diese Herleitung:

$$\nabla f = \sum_i (\nabla f)_{y_i} e_{y_i}$$

Dabei ist  $f$  ein Skalarfeld und  $\nabla f$  ein Vektor. Dabei kann man den Vektor, als Summe seiner Komponenten mal der Einheitsvektoren angeben, da sich die Einheitsvektoren aber hinzu  $e_{y_i}$  geändert haben, müssen wir auch die Komponenten ändern. Das machen wir wieder durch Projektion! Es gilt

$$\begin{aligned} (\nabla f)_{y_i} &= \nabla f \cdot e_{y_i} = \nabla f \cdot \frac{1}{b_{y_i}} \frac{\partial \vec{r}}{\partial y_i} \\ &\stackrel{\text{Definition Nabla}}{=} \frac{1}{b_{y_i}} \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial y_i} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial y_i} + \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial y_i} \right) \\ &= \frac{1}{b_{y_i}} \frac{\partial f}{\partial y_i} \end{aligned}$$

Beachte, die  $x_i$  kommen, von dem Skalarprodukt des Vektors  $\nabla f$  und  $\vec{r}$ .

### 1.7.19 Vektorfeld

Ein Vektorfeld ist eine Vektorwertige Funktion, bekommt also einen Vektor und gibt einen Vektor aus. Zum Beispiel das Kraftfeld der Erde (da die Erdbeschleunigung nicht immer gleich ist) gibt einen Vektor aus (Kraftvektor) wenn man ihm eine Position mitteilt.

$$\vec{F}(\vec{r})$$

### 1.7.20 Divergenz

Die Divergenz eines Vektorfeldes lässt sich mit dem Nablaoperator ausrechnen und ist (da Nabla und das Feld beide Vektoren sind) ein Skalar.

$$\text{div } \vec{a}(\vec{r}) = \nabla \cdot \vec{a}(\vec{r}) = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3}$$

Die Divergenz beschreibt die Quellen eines Vektorfeldes. Wenn die Divergenz = 0 ist, dann hat das Feld keine Quellen (an keinen Punkt geht mehr aus als rein.)

#### Rechenregeln der Divergenz

$$\nabla \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \nabla \cdot \vec{a} + \nabla \cdot \vec{b}$$

$$\nabla \cdot (\beta \vec{a}) = \beta \nabla \cdot \vec{a}$$

$$\nabla \cdot (c(\vec{r}) \cdot \vec{a}(\vec{r})) = \nabla c(\vec{r}) \cdot \vec{a} + c(\vec{r}) \nabla \cdot \vec{a}(\vec{r}) \quad \text{Produktregel lol}$$

### 1.7.21 Rotation

Die Rotation eines Vektorfeldes beschreibt die Verwirbelung eines Feldes. Es ist wieder ein Vektor, der senkrecht auf den Wirbeln steht.

$$\text{rot } \vec{a}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{a}(\vec{r})$$

### 1.7.22 Divergenz des Gradientenfeldes

Die Divergenz des Gradientenfeldes wird geschrieben als:

$$\nabla \cdot (\nabla \cdot c(\vec{r})) = \Delta c(\vec{r})$$

### 1.7.23 Laplace

Der Laplace- Operator ist die symmetrische zweite Ableitung in drei Dimensionen, also

$$\Delta = \sum_i e_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

### 1.7.24 Divergenz in Krummlinigen Koordinaten

Sei ein Vektorfeld in Krummlinigen Koordinaten gegeben.

Wir betrachten also den Vektor:

$$\vec{a} = \sum_i a_{y_i} e_{y_i}$$

Hierbei sind  $a_{y_i}$  als auch  $e_{y_i}$  Funktionen von den  $y_i$ , also den neuen Krummlinigen Koordinaten, wir müssen also Nabla in Krummlinigen Koordinaten Verwenden und dann mit Trick umstellen. Wir kommen am Ende auf folgende Formel:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{a} &= \sum_i \frac{1}{b_{y_i}} \frac{\partial a_{y_i}}{\partial y_i} + \sum_{i,m} \frac{a_{y_m}}{b_{y_i} b_{y_m}} \frac{\partial b_{y_i}}{\partial y_i} \\ &= \frac{1}{b_{y_1} b_{y_2} b_{y_3}} \left( \frac{\partial}{\partial y_1} (b_{y_2} b_{y_3} a_{y_1}) + \frac{\partial}{\partial y_2} (b_{y_3} b_{y_1} a_{y_2}) + \frac{\partial}{\partial y_3} (b_{y_1} b_{y_2} a_{y_3}) \right) \end{aligned}$$

Wenn das Vektorfeld als Gradient eines Skalfeldes gewonnen wurde, so kann man die  $a_{y_i}$  einfach durch die Definition ersetzen.

$$a_{y_i} = \frac{1}{b_{y_i}} \frac{\partial f}{\partial y_i}$$

Wenn f die Skalar Funktion ist, also:

$$\vec{a} = \nabla \cdot f$$

war.

## Wichtiges: Zylinderkoordinaten

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \rho \cos(\varphi) \\ \rho \sin(\varphi) \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

In den Zylinderkoordinaten gibt es auch entsprechende Einheitsvektoren.

$$e_\rho = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## Kugelkoordinaten

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Die Einheitsvektoren in Kugelkoordinaten sind:

$$e_r = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$e_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}$$

$$e_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

## Einheitsvektoren erhalten

$x_i = f_i(q_1, q_2, q_3)$  Dabei ist  $f$  ein Skalarfeld und  $q_i$  die Neuen Komponenten.

$$b_i = \frac{\partial f}{\partial q_i}$$

Wenn man dann die  $b_i$  noch normiert erhält man die neuen Einheitsvektoren  $\vec{e}_{q_i}$ .

## partielle Vertauschungen

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}$$

## Totale Ableitung

$$\frac{df}{dt} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \nabla f \cdot \dot{r}$$

## Totales Differential

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = \nabla f \cdot d\vec{r}$$

## Wichtiges:

### Jacobi Det

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} & \frac{\partial x_1}{\partial q_2} & \frac{\partial x_1}{\partial q_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial q_1} & \frac{\partial x_2}{\partial q_2} & \frac{\partial x_2}{\partial q_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial q_1} & \frac{\partial x_3}{\partial q_2} & \frac{\partial x_3}{\partial q_3} \end{pmatrix}$$

⇒ Ist die Jacobideterminante ungleich Null so ist eine Umkehrung der Transformation möglich.  
**koordinatentransformation**

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \sum x_i e_i \\ \vec{r} &= \sum y_i e'_i \\ y_i &= \vec{r} \cdot e'_i \end{aligned}$$

### Volumenelement

$$\begin{aligned} dV &= a_i \cdot (a_2 \times a_3) \\ &= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} dy_1 & \frac{\partial x_2}{\partial y_1} dy_1 & \frac{\partial x_3}{\partial y_1} dy_1 \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_2} dy_2 & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} dy_2 & \frac{\partial x_3}{\partial y_2} dy_2 \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_3} dy_3 & \frac{\partial x_2}{\partial y_3} dy_3 & \frac{\partial x_3}{\partial y_3} dy_3 \end{pmatrix} \stackrel{\text{Rechenregeln zur Det}}{=} J dy_1 dy_2 dy_3 \\ &= b_{y_1} b_{y_2} b_{y_3} dy_1 dy_2 dy_3 \end{aligned}$$

### Bekannte Differentiale

$$\text{Polarkoordinaten: } d\vec{r} = dr e_r + r d\varphi e_\varphi$$

$$\text{Zylinderkoordinaten: } d\vec{r} = dr e_r + r d\varphi e_\varphi + dz e_z$$

$$\text{Kugelkoordinaten: } d\vec{r} = dr e_r + r d\theta e_\theta + r \sin\theta d\varphi e_\varphi$$

### Nabla in Krummlinigen Kords

$$\nabla = \sum_i e_{y_i} \frac{1}{b_{y_i}} \frac{\partial}{\partial y_i}$$

### Divergenz

$$\text{div } \vec{a}(\vec{r}) = \nabla \cdot \vec{a}(\vec{r}) = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3}$$

### Rechenregeln der Divergenz

$$\nabla \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \nabla \cdot \vec{a} + \nabla \cdot \vec{b}$$

$$\nabla \cdot (\beta \vec{a}) = \beta \nabla \cdot \vec{a}$$

$$\nabla \cdot (c(\vec{r}) \cdot \vec{a}(\vec{r})) = \nabla c(\vec{r}) \cdot \vec{a} + c(\vec{r}) \nabla \cdot \vec{a}(\vec{r}) \quad \text{Produktregel lol}$$

### Rotation

$$\text{rot } \vec{a}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{a}(\vec{r})$$

### Divergenz in Krummliniegen

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{a} &= \sum_i \frac{1}{b_{y_i}} \frac{\partial a_{y_i}}{\partial y_i} + \sum_{i,m}^{i \neq m} \frac{a_{y_m}}{b_{y_i} b_{y_m}} \frac{\partial b_{y_i}}{\partial y_i} \\ &= \frac{1}{b_{y_1} b_{y_2} b_{y_3}} \left( \frac{\partial}{\partial y_1} (b_{y_2} b_{y_3} a_{y_1}) + \frac{\partial}{\partial y_2} (b_{y_3} b_{y_1} a_{y_2}) + \frac{\partial}{\partial y_3} (b_{y_1} b_{y_2} a_{y_3}) \right) \end{aligned}$$

## 1.8 Geschwindigkeit und Acceleration in krummlinigen Koords

Allgemein geschrieben sehen die Geschwindigkeits und Beschleunigungvektoren in Krummlinigen Koordinaten so aus:

$$\vec{v} = \sum_i v_{y_i} e_{y_i}$$

und

$$\vec{a} = \sum_i a_{y_i} e_{y_i}$$

Wir kennen bereits das totale Differential eines Vektors:

$$d\vec{r} = \sum_i \frac{\partial \vec{r}}{\partial y_i} dy_i = \sum_i b_{y_i} e_{y_i} dy_i$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \sum_i b_{y_i} e_{y_i} \dot{y}_i$$

$$\Rightarrow v_{y_i} = b_{y_i} \dot{y}_i$$

## 2 Dynamik des Massepunktes

### 2.1 Taylor-Entwicklung

#### 2.1.1 Allgemeine Form (um die Null entwickelt)

Man kann Funktionen lokal auch näherungsweise mit einer Summe/ Reihe darstellen. Z.B ist die Ableitung einer Funktion, die beste Lineare Näherung an einem Punkt, wenn wir allerdings auch nicht lineare Terme zulassen, können wir die Funktion noch besser nähern und in manchen Fällen sogar ganz als Potenzreihe darstellen.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

#### 2.1.2 Nützliche Taylor Reihen:

Einige Nützliche Taylorreihen sind:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$
$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$
$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

#### 2.1.3 Entwicklung um beliebigen Punkt

Wir müssen natürlich nicht immer um die 0 entwickeln (beim ln ist das sogar gar nicht möglich). Wir können uns also einen beliebigen Punkt aussuchen  $x_0$ :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

## 2.2 Komplexe Zahlen

Der Anfang der komplexen Zahlen ist die Zahl  $i$ , die sich durch die Wurzel der  $-1$  darstellen lässt.

$$i = \sqrt{-1}$$

Nun lassen sich auch folgende Gleichungen lösen:

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = i$$

Grundsätzlich hat eine komplexe Zahl immer einen Realteil  $a$  und einen Imaginärteil  $b$ , sodass man schreiben kann:

$$z \in \mathbb{C}, \quad z = a + i b$$

Deswegen kann man sich  $\mathbb{C}$  auch als  $\mathbb{R}^2$  vorstellen, und damit den Betrag einer komplexen Zahl genauso definieren:

$$|z|^2 = a^2 + b^2$$

Und den Winkel in der Gaußschen Zahlenebene:

$$\varphi = \arctan \frac{b}{a}$$

Wir können jede komplexe Zahl auch schreiben als:

$$z = |z|e^{i\varphi}$$

Und weiter noch gilt:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

Wenn man nun  $\varphi = \pi$  setzt, erhält man:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Eine Zahl komplex zu konjugieren heißt, das Vorzeichen des Imaginärteils zu wechseln.

$$z = a + i b \Rightarrow z^* = a - i b$$

Die Polardarstellung einer komplex konjugierten Zahl ist demnach:

$$z^* = |z|e^{-i\varphi}$$

Das Betragsquadrat einer komplexen Zahl stimmt mit dem Produkt der komplexen Zahl mit ihrem komplex konjugierten überein.

$$z z^* = |z|^2$$

### 2.2.1 Wichtige Trigonometrische Identitäten (für $\mathbb{C}$ )

$$\cos \varphi = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})$$

$$\sin \varphi = \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})$$

$$\cosh \varphi = \cos(i\varphi) = \frac{1}{2}(e^\varphi + e^{-\varphi})$$

$$\sinh \varphi = -i \sin(i\varphi) = \frac{1}{2}(e^\varphi - e^{-\varphi})$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

## 2.3 Differentialgleichungen

Sei  $x(t)$  eine Funktion von  $t$ . Dann ist die  $n$ -te Ableitung  $x^{(n)}(t)$ . Eine gewöhnliche Differentialgleichung ist eine Funktion, der Art:

$$f(x^{(n)}, x^{(n-1)}, \dots, \dot{x}, x, t) = 0$$

Es gibt verschiedene Klassifikationen:

1. **Gewöhnlich:** Es gibt nur **eine** unabhängige Variable.
2. **partielle:** Es gibt **mehrere** unabhängige Variablen (juckt uns in Theo 1 noch nicht)
3. **explizit:** Man kann die Gleichung auflösen nach Ihrer höchsten Ableitung (wenn nicht heißt sie implizit.)  
Also:

$$x^{(n)} = g(x^{(n-1)}, \dots, x(t), t)$$

4. **linear:** Eine DGL ist linear, wenn dieses  $f(\dots)$  linear ist. (keine quadratischen Terme).
5. **homogen:** Keine Terme ohne  $x(t)$ , also jeder Summand hat mind. ein  $x$  drin.

Wenn die DGL linear ist können wir  $f$  auch in der Operatorschreibweise einführen. Dann ist:

$$L^{(n)}x(t) = h(t)$$

Dabei ist  $h(t)$  ein Term, der 0 ist für Homogene DGL und für inhomogene eine Funktion, die von  $t$  abhängt, aber nicht von  $x$ .

Hier ist der Operator  $L$ :

$$L^{(n)} = \sum_{i=0}^n f_i(t) \frac{d^i}{dt^i}$$

Dazu ein Beispiel:

$$4x^{(4)} + 4x + 5t = 0 \quad \Rightarrow \quad L^{(4)} = 4 \cdot \frac{d^4}{dt^4} + 4, \quad h(t) = -5t$$

### 2.3.1 Lösen von homogener DGL

Schauen wir uns zuerst eine lineare ( $L$ ) homogene ( $h(t) = 0$ ) DGL an:

$$L^{(n)}x(t) = \sum_{i=0}^n f_i(t) \frac{d^i x(t)}{dt^i} = 0$$

Im Allgemeinen ist die Lösung eine Lösungsschar (also mehrere Funktionen), die von  $n$ -Integrationskonstanten abhängt  $\gamma_i$ :

$$x(t | \gamma_1, \dots, \gamma_n)$$

Die Lösungen sind Vektoren eines Lösungsraumes. Wir versuchen nun also die Basisvektoren dieses Raumes zu finden. Damit können wir alle anderen Lösungen durch Linearkombination erhalten.

Wir suchen also  $n$ -linear unabhängige Funktionen, die die allgemeine Lösung der DGL ergeben.

$$x(t | \gamma_1, \dots, \gamma_n) = \sum_{j=1}^n a_j x_j(t)$$

Dabei ist  $n$  die Ordnung der DGL und  $x_j$  die gesuchten Basisvektoren. Für eine DGL 2-ter Ordnung müssen wir also zwei linear unabhängige Funktionen finden, die die DGL lösen.

### 2.3.2 Überprüfen der Lin. Unabhängigkeit

Aus der Linearen Algebra wissen wir, dass wir mithilfe der Determinante herausfinden können, ob die jeweiligen Vektoren in der Matrix linear unabhängig sind.

Hier nutzen wir nun die Wronski-Matrix:

Seien  $f_n$  skalare Funktionen, die wir auf lineare Unabhängigkeit prüfen wollen, so gilt, dass die Wronski-Determinante ungleich Null sein muss.

$$W(f_1, \dots, f_n)(t) = \det \begin{pmatrix} f_1(t) & f_2(t) & \dots & f_n(t) \\ \dot{f}_1(t) & \dot{f}_2(t) & \dots & \dot{f}_n(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \dots & f_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \neq 0$$

Dann sind die  $f_i$  linear unabhängig und ggf. die Basisvektoren des Lösungsraums.

### 2.3.3 inhomogene DGL

Im allgemeinen ist  $h(t) \neq 0$ , also liegt eine inhomogene DGL vor. Dann lösen wir zuerst die zugrunde liegende homogene DGL, also setzen  $h(t)$  einfach artifizially auf 0 und errechnen und die allgemeine Lösung der homogenen DGL.

Dann müssen wir nun noch eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung finden  $x_0(t)$  und diese auf die allgemeine Lösung addieren. Also:

$$L^{(n)}(t) x_0(t) = h(t)$$

Und gilt  $x_a(t)$  sei die Lösung der homogenen DGL, also:

$$L^{(n)}(t) x_a(t) = 0$$

Dann ist die endgültige Lösung:

$$x_L(t) = x_a(t) + x_0(t)$$

### 2.3.4 Separation der Variablen

Wenn man einfache DGLs hat, so kann man die Variablen (z.B.  $dx, dt$ ) voneinander trennen und dann getrennt integrieren:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -g \\ \Rightarrow dv &= -g dt \quad | \text{Integrieren} \\ \int dv &= -g \int dt \\ v &= -gt + C \end{aligned}$$

### 2.3.5 Steady State Lösung

Die Steady State Lösungsmethode ist eine schnelle Methode um eine spezielle Lösung zu bekommen. Dabei schaut man sich bei einer Gleichung den Zustand an, bei dem sich nichts ändern würde (Steady State), das passiert also bei  $\dot{v} = 0$ .

Dazu schauen wir uns den Fall der Stokeschen Reibung an.

$$\begin{aligned} \dot{v} &= -g - \frac{\xi}{m}v \\ \Rightarrow \dot{v} + \frac{\xi}{m}v &= -g \end{aligned}$$

Dann setzen wir nun  $\dot{v} = 0$  und erhalten als spezielle Lösung für  $v_0$ :

$$v_0 = -\frac{mg}{\xi}$$

Wenn wir das mit der allgemeinen Lösung der homogenen DGL kombinieren, erhalten wir die komplette Lösung:

$$v(t) = C e^{-\frac{\xi}{m}t} - \frac{mg}{\xi}$$

Nun müsste man nur noch  $C$  bestimmen, indem man  $t = 0$  setzt für die Anfangsbedingung und dann nach  $C$  auflöst.

### 2.3.6 DGLs zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

In der klassischen Mechanik treffen wir oft auf lineare DGLs mit konstanten Koeffizienten.

$$a_2\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0x = h(t)$$

Hat man so eine DGL vor sich liegen betrachtet man zuerst wieder nur den Homogenen Teil  $h(t) = 0$  und benutzt den Exponentialansatz. D.h. man nimmt an,  $x(t)$  hat die Form:

$$x(t) = Ce^{r \cdot t}$$

1. Den Ansatz in die Gleichung einsetzen:

$$a_2Ce^{r \cdot t} r^2 + a_1Ce^{r \cdot t} r + a_0Ce^{r \cdot t} = 0$$

2. Umstellen, um die s.g. charakteristische Gleichung zu erhalten.

$$Ce^{r \cdot t}(a_2r^2 + a_1r + a_0) = 0$$

3. Die charakteristische Gleichung Null setzen und so nach  $r$  auflösen. **Achtung:** die Diskriminante kann auch negativ sein, dann muss man komplex weiterrechnen.
4. **Spezialfall:** Wenn die Nullstellen des charakteristischen Polynoms zusammenfallen (also  $r_1 = r_2$ ), dann erhalten wir die zweite Lösungsfunktion, indem wir die unabhängige Variable (bei uns  $t$ ) multiplizieren. (Also Lösungsfunktion 1:  $c_1e^{r_1t}$  und Lösungsfunktion 2:  $c_2 \cdot t \cdot e^{r_1t}$ )

#### Inhomogener Fall

Wenn nun konstante Koeffizienten hat, aber eine inhomogene DGL ( $h(t) \neq 0$ ), dann muss man wieder die homogene Lösung bestimmen und dann eine spezielle Lösung finden.

Das Finden einer speziellen Lösung  $x_s$  bekommt man dann mit dem Verfahren: Variation der Konstanten. D.h. man lässt zu, dass die Integrationskonstanten auch von der Variable abhängen. Also:

$$x_s(t) = c_1(t) \cdot x_1(t) + c_2(t) \cdot x_2(t)$$

Dabei sind die  $x_i$  die Basisfunktionen des Lösungsraums (also die Lösungen der homogenen DGL). Wir erhalten also zwei neue Unbekannte,  $c_1, c_2$ , setzen wir nun  $x_s$  in unsere ursprüngliche inhomogene DGL ein, so erhalten wir eine neue DGL, die es nach  $c_1, c_2$  zu lösen gilt.

Das wird aber sehr schnell sehr komplex, deswegen folgt hier eine Liste:

$h(t)$	$x_s$
constant	$\frac{h}{a_0}$ Steady State
$a + bt + ct^2$	$A + Bt + Ct^2$
$Ae^{\lambda t}$	$Ce^{\lambda t}$
$C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)$	$A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$

Table 1: Verschiedene einfache Spezialfälle

## 2.4 Newtonsche Gesetze

Im weiteren schauen wir uns die drei Newtonschen Gesetze und deren Auswirkungen an. Also v.a. welche weiteren Gesetze sich damit nicht herleiten lassen.

### 1. Trägheitsgesetz

Jeder Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung, wenn er nicht durch Kräfte gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern.

### 2. Bewegungsgesetz

Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und erfolgt in deren Richtung. Die Kraft ist also ein Vektor.

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Dabei ist  $m$  die träge Masse, also in erster Linie eine skalare Eigenschaft eines Körpers sich einer Bewegungsänderung zu widersetzen. (ähnlich Trägheitsmoment)

Im allgemeinen kann sich die Masse eines Körpers aber auch über die Zeit verändern (Rakete), also braucht es eine allgemeinere Formulierung.

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \dot{\vec{p}}$$
$$\vec{p} = m\vec{v}$$

### 3. Reaktionsgesetz

Die Wirkungen zweier Körper aufeinander sind stets gleich und von entgegengesetzter Richtung. D.h. die Kraftvektoren sind antiparalle zueinander.

$$F_{12} = -F_{21}$$

### 4. Superpositionsprinzip

Verschiedene Kräfte addieren sich linear.

$$\vec{F}_{\text{gesamt}} = \sum_i \vec{F}_i$$

## 2.5 Grundschemata der Klassischen Mechanik

Das Grundschemata der klassischen Mechanik sind Differentialgleichungen. Mathematisch gesehen sind das dann drei-dimensionale Systeme gewöhnlicher DGLs zweiter Ordnung:

$$m\ddot{x}_i - F_i(\dot{x}_i, x_i, t) = 0 \quad 1 \leq i \leq 3$$

Man kann das Schema also wie folgt beschreiben:

1. Die Bewegungsgleichung aufstellen. (DGL)
2. Die Differentialgleichung lösen. Dabei kann man dies analytisch oder Numerisch machen.
3. Nun muss man die Lösung noch Physikalisch Interpretieren. Also bekannte Grenzen etc. einsetzen und ggf. die Gleichung mit bereits vorhandenen Überlegungen vergleichen (einfache Fälle ausrechnen)

## 2.6 Fallgesetzte

### 2.6.1 Freier Fall

Der Freie Fall lässt sich als Bewegungsgleichung schreiben als:

$$m\ddot{x} = -mg$$

Das Minus rührt von der Orientierung des Koordinatensystems her. Wir erkennen also dass sich die Masse des Objektes rauskürzt und wir erhalten:

$$\ddot{x}(t) = -g$$

Die ist nun eine gewöhnliche, lineare, inhomogene DGL zweiter Ordnung. Die Lösung ist einfach, aber wir gehen mit einem generellen Konzept an die Sache ran.

Wir wenden den Trick an, dass wir die Variablen verdoppeln. Aktuell haben wir eine freie Variable ( $x(t)$ ) und deren Ableitungen. Wir nennen nun die erste Ableitung einfach die Geschwindigkeit  $v$ , also  $\dot{x} = v$  und so erhalten wir nun zwei Variablen,  $v$  und  $x$ . Diese nennt sich **Verdopplung der Variablen:** und wir erhalten:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v \\ \dot{v} &= -g\end{aligned}$$

Dadurch haben wir die DGL in ein System von zwei DGLs 1. Ordnung überführt. Das kann man nun auch in Matrixschreibweise schreiben als:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{lineare Abbildung}} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}}_{\text{inhomogener Teil}}$$

Dieses System gilt es nun aufzulösen. Erstmal machen wir dies für  $v$ :

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= -g && | \text{Separation der Variablen} \\ dv &= -g dt && | \text{Integration} \\ v &= -gt + C_1\end{aligned}$$

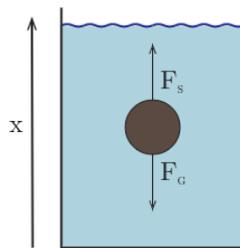
Nun kennen wir die Formel für  $v$  und können damit die zweite DGL lösen und auf  $x(t)$  zu gelangen. Wie gehen dabei analog vor wie für  $v$ , also zuerst Variablen sperieren, dann integrieren. wir erhalten:

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2$$

Nun kann man noch physikalisch interpretieren und einige rahmenbedingungen festlegen. Zum Beispiel könne wir sagen:  $v(0) = v_0$ , also  $C_1 = v_0$  also die Anfangsgeschwindigkeit. Und mit gleicher überlegung  $C_2 = x_0$  also der Anfangsort.

## 2.6.2 Fall mit Stoke'scher Reibung

Der Fall in einer Flüssigkeit zum Beispiel, gilt als Fall mit Stoke'scher Reibung.



Es existiert also noch eine weitere Kraft  $F_s$ , also die Reibungskraft der Flüssigkeit auf die fallende Kugel. Diese lässt sich nach der Navier-Stokes-Gleichung mit niedriger Reynoldszahl berechnen:

$$F_s = 6\pi\eta Rv \Rightarrow F_s = \xi v, \quad \text{mit } \xi = 6\pi\eta R$$

Dabei ist  $v$  die Geschwindigkeit der Kugel.

Wir erhalten davon also die Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{x} = -mg - \xi\dot{x}$$

Hier mag das doppelte Minus etwas unintuitiv scheinen (spoiler, es sit unintuitiv). Aber wir definieren die Reibungskraft, immer mit einem Minus, weil sie Entgegen der Bewegung wirkt. Wir betrachten hier eben auch Skalara Größen und keine Vektoriellen, deswegen muss vor den Reibungsterm ein Minus, dass es immer entgegen der Bewegungsrichtung wirkt. Schauen wir uns den Fall mal Vektoriell an, wir haben hier Anfangs  $m \cdot -g$ , weil wir die "Richtung" nach unten als Minus definieren. Wenn wir also die Bewegung anschauen (nach unten fallend) ist der Geschwindigkeitsvektor auch negativ. (und minus mal minus ist plus), also ergibt es auch vektoriell Sinn. Wir geben die Reibungskraft immer mit dem Minus, an damit die Richtung immer stimmt (allg, Fall), denn Würde die Kugel nach oben fallen, dann wirkt nun durch positive Geschwindikeit beide Kräfte gegen die Bewegung.

Wir verdoppeln wieder die Variablen:

$$m\dot{v} = -mg - \xi v$$

Nun haben wir für  $v$  eine inhomogene lineare DGL 1. Ordnung. Wir lösen also zuerst den homogenen Teil, also

$$\dot{v} = -\frac{\xi}{m}v$$

Wir seperieren wieder die Variablen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} dv &= -\frac{\xi}{m} dt && \text{[Integration]} \\ \ln(v) &= -\frac{\xi}{m}t + C_0 && \text{[Exponentialfunktion]} \\ v &= e^{-\frac{\xi}{m}t + C_0} = C_1 e^{-\frac{\xi}{m}t} && \text{[Wobei: } C_1 = e^{C_0} \end{aligned}$$

Dies könne wir umschreiben, wenn wir uns die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  anschauen, dazu müssen wir in die Gleichung oben  $t = 0$  setzen und sehen:

$$v_0 \stackrel{t=0}{=} v(0) = C_1 \cdot e^{-\frac{\xi}{m} \cdot 0}$$

Also die Konstante  $C_1$  ist unsere Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$

Wir haben hier nichts gerechnet, sondern nur Variablen umbenannt, sodass wir einen physikalischen Bezug haben.

Betrachten wir nun den inhomogenen Fall:

$$\frac{dv}{dt} = -g - \frac{\xi}{m}v$$

Hier gehen wir nun vor, wie bei einer "normalen DGL", also wir betrachten die Bewegungsgleichung und separieren die Variablen.

$$\frac{dv}{dt} = -g - \frac{\xi v}{m} \stackrel{-g \text{ ausklammern}}{=} -g \left(1 + \frac{\xi v}{mg}\right) \quad | \text{ Umstellen} \quad (5)$$

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{\xi v}{mg}\right)} dv = -g dt \quad | \int$$

$$\frac{mg}{\xi} \ln\left(1 + \frac{\xi v}{mg}\right) = -gt + B$$

Durch das Integrieren, wurde man auf beiden Seite eine Konstante dazubekommen, aber wir vereinen diese immer in einer und schreiben diese Rechts dazu (ich kann ja immer mit -c umformen)

Nun müssen wir diesen Ausdruck wieder nach  $v$  umformen, um eine Lösungsfunktion für die DLG zu erhalten:

$$\frac{mg}{\xi} \ln\left(1 + \frac{\xi v}{mg}\right) = -gt + B$$

$$\ln\left(1 + \frac{\xi v}{mg}\right) = (-gt + B) \frac{\xi}{mg}$$

$$1 + \frac{\xi v}{mg} = e^{(-gt+B) \frac{\xi}{mg}}$$

$$\frac{\xi v}{mg} = e^{(-gt+B) \frac{\xi}{mg}} - 1$$

$$v = \frac{mg}{\xi} \left( e^{(-gt+B) \frac{\xi}{mg}} - 1 \right)$$

Wir erkenne wieder einen Zerfall. Schicken wir nun  $t \rightarrow \infty$ , um uns anzuschauen welche Geschwindigkeit sich auf Lange Zeit einstellt:

$$v_{t \rightarrow \infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{mg}{\xi} \left( e^{(-gt+B) \frac{\xi}{mg}} - 1 \right) = \frac{-mg}{\xi}$$

Diese Endgeschwindigkeit hätten wir auch aus der Steady State Bedingung  $\dot{v} = 0$  erhalten:

$$0 = -mg - \xi v \Rightarrow v = \frac{-mg}{\xi}$$

Wir wollen unsere Endgeschwindigkeit aber immer positiv angeben, also definieren wir nun  $v_\infty$  als:

$$v_\infty = \frac{mg}{\xi}$$

Nun können wir das in unserer Gleichung für  $v$  ersetzen, um diese Schöner zu machen.

$$v = v_\infty \left( e^{(B-gt)/v_\infty} - 1 \right)$$

Nun interessiert uns noch die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$ , die wir wie immer erhalten indem wir  $t = 0$  setzen.

$$v_0 = v(0) = v_\infty \left( e^{B/v_\infty} - 1 \right)$$

Nun stellen wir schlaue um, sodass wir B isolieren könne, bzw. müssen wir B nicht komplett expliziet angeben um es ersetzen zu können. Also wir stellen um:

$$\frac{v_0}{v_\infty} = e^{B/v_\infty} - 1$$

$$\frac{v_0}{v_\infty} + 1 = e^{B/v_\infty}$$

Wir können nun den ganzen  $e^{B/v_\infty}$  Term ersetzen.

Dann ergibt sich für  $v(t)$ :

$$v(t) = v_{\infty} \left( \left( \frac{v_0}{v_{\infty}} + 1 \right) e^{-gt/v_{\infty}} - 1 \right) = (v_0 + v_{\infty}) e^{-gt/v_{\infty}} - v_{\infty}$$

Nun kann man durch erneutes Integrieren und bestimmung der Integrationskonstante mit den Anfangsbedinunen noch  $x(t)$  aufstellen wenn das beliebt.

$$x(t) = x_0 - v_{\infty} t + (v_0 + v_{\infty}) \frac{v_{\infty}}{g} (1 - e^{-gt/v_{\infty}})$$

### 2.6.3 Fall mit Newton'scher Reibung

OKAY FUCK DIESEE REIBUNG kann man woanders nachlesen wenn man möchte (Nein will man nicht lol)

## 2.7 Der Harmonische Oszillator

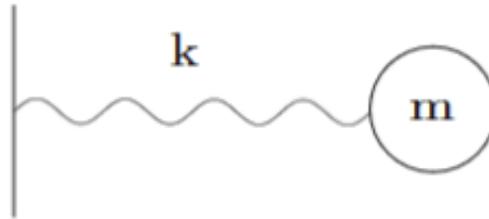


Figure 2: Harmonischer Oszillator

Ein harmonischer Oszillator lässt sich am einfachsten beobachten, wenn man eine Feder an eine Masse anbringt, lenkt man die Masse nun aus, so erfährt sie proportional zur Auslenkung  $x$  eine Rückstellkraft  $F_{feder}$ . Es gilt:  $F_{feder} = -kx$  Also ergibt sich für die Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{x} = -kx$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad | \text{ mit } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Diese DGL ist linear, homogen und hat konstante Koeffizienten, wir verwenden also den Exponentialansatz:

$$x(t) = Ae^{\alpha t}$$

Einsetzen ergibt (bereits ausgeklammert):

$$Ae^{\alpha t}(\alpha^2 + \omega_0^2)$$

Wir müssen also die Charakteristische Gleichung lösen:

$$\alpha^2 + \omega_0^2 = 0$$

Die Lösung wird offensichtlich komplex:

$$\alpha = \pm i\omega_0$$

Damit stellen wir nun die allg. Lösung auf. Die DGL hatte die Ordnung 2, also haben wir auch zwei Lösungsfunktionen.

$$x(t) = A_+ e^{i\omega_0 t} + A_- e^{-i\omega_0 t}$$

Dabei sind  $A_+$  und  $A_-$  die noch unbekanntenen Konstanten.

Wir wissen außerdem, dass die Lösung  $x(t)$  Reel sein muss, mit dem Wissen aus den komplexen Zahlen können wir also fordern, dass die Funktion ident zu ihrem komplex konjugierten ist:

$$x(t) = x^*(t)$$

$$x = A_+ e^{i\omega_0 t} + A_- e^{-i\omega_0 t}$$

$$x^* = A_+^* e^{-i\omega_0 t} + A_-^* e^{i\omega_0 t}$$

Die noch unbekanntenen Konstanten werden also komplex konjugiert und das Vorzeichen vor dem  $i$  jeweils gedreht. Man erkennt, wenn  $x = x^*$ :

$$A_+ = A_-^*$$

$$A_- = A_+^*$$

Daraus kann man schließen, dass  $A_+$  die Form einer komplexen Zahl haben muss, die so aussieht:

$$A_+ = a + ib$$

$$A_- = a - ib$$

Wir setzen nun  $A_+$  und  $A_-$  ein und ersetzen weiterhin noch  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ . Damit erhalten wir:

$$(a + ib)(\cos(\omega_0 t) + i \sin(\omega_0 t)) + (a - ib)(\cos(\omega_0 t) - i \sin(\omega_0 t)) \quad \parallel \text{ausklammern}$$

$$\Rightarrow 2a \cos(\omega_0 t) - 2b \sin(\omega_0 t)$$

Wenn man nun weitere Konstanten einführt,  $A = -2b$  und  $B = 2a$  kann man die allgemeine Lösung umschreiben zu:

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t)$$

Die allg. Lösung ist in dieser Darstellung die Überlagerung von zwei Schwingungen mit gleicher Frequenz, aber verschiedenen Amplituden.

Allerdings kann man dies weiterumschreiben, indem man einen Trick anwendet und eine "1-multipliziert" bzw.  $\frac{\sqrt{A^2+B^2}}{\sqrt{A^2+B^2}}$ :

$$x(t) = \underbrace{\sqrt{A^2 + B^2}}_{A_0} \left( \underbrace{\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}}_{\cos \varphi} \sin(\omega_0 t) + \underbrace{\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}}_{\sin \varphi} \cos(\omega_0 t) \right)$$

Dabei ist  $\varphi$  ein Hilfswinkel der einfach eine Phasenverschiebung repräsentiert.

$$x(t) = A_0(\cos \varphi \sin(\omega_0 t) + \sin \varphi \cos(\omega_0 t))$$

Wir wenden das Additionstheorem an und erhalten:

$$x(t) = A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

### 2.7.1 Phasenraum für harm. Oszillator:

Die Grundgleichung ist immernoch:

$$m\ddot{x} = -kx$$

Nun verdoppeln wir wieder die Variablen:

$$\dot{x} = v$$

Wir nutzen wieder  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  und erhalten damit für die Matrixdarstellung:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$$

Die  $(x, v)$ - Ebene ist der Phasenraum für den harmonischen Oszillator (in diesem Fall handelt es sich also um eine Phasenebene).  $(\dot{x}, \dot{v})$  ist das Vektorfeld, das den Fluss des Systems durch den Phasenraum beschreibt. Das resultierende Flussdiagramm heißt Phasenportrait. Der harmonische Oszillator hat geschlossene Trajektorien, die Ellipsen sind.

Betrachten wir den Quotienten der beiden Variablen.

$$\frac{\dot{x}}{\dot{v}} = \frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dv}{dt}} = \frac{v}{-\omega_0^2 x} = \frac{dx}{dv}$$

Man erkennt, dass sich quasi die Zeit  $dt$  kürzt und damit ist der Quotient schonmal konstant: Damit können wir die Variablen separieren und erhalten:

$$-\omega_0^2 x dx = v dv$$

Wir integrieren beide Seiten und bringen zusammen:

$$\frac{1}{2} \omega_0^2 x^2 + \frac{1}{2} v^2 = \underbrace{\text{const}}_{\text{weil der Quotient an sich const ist}}$$

Benutzen wir die Definition von  $\omega_0$  so können wir noch umschreiben zu:

$$\frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} mv^2 = \text{const} = E$$

Dabei ist  $E$  die Gesamtenergie im System. Die Energie ist eine Erhaltungsgröße.

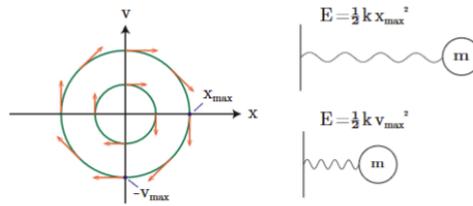


Figure 3: Phasenportrait

### 2.7.2 Gedämpfter harmn. Oszillator

Wir erweitern den harmonischen Oszillator um einen Reibungsterm (ähnlich der Stokeschen Reibung bei den Fallgesetzen):

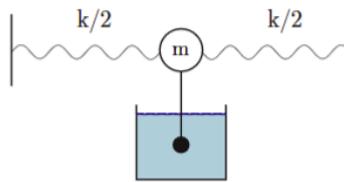


Figure 4: Gedämpfte oszilation

$$m\ddot{x} = -kx - \xi\dot{x}$$

Mit  $\beta = \frac{\xi}{2m}$  (warum  $2m$  und dann gleich auch  $2\beta$  ist wieder ein Trick, der am ende klar wird).

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Wir wenden wieder den Exponentiopsansatz an und erhalten folgende charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0$$

Diese Lösen wir mithilfe der Mitternachtsformel:

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

Hier erkennt man, warum wir vorhin  $2\beta$  eingesetzt aben, da sich nun der Nenner Wegkürzen lässt. Dadurch ergibt sich die allg. Lösung der DGL, wenn  $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$x(t) = a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t}$$

Wir erkennen, anhand der Wurzel für die  $\lambda$ , dass hier 3 Fälle eintreten können:

1. Schwache Dämpfung:  $\beta^2 < \omega_0^2$
2. Kritische Dämpfung:  $\beta^2 = \omega_0^2$
3. starke Dämpfung:  $\beta^2 > \omega_0^2$

#### Schwache Dämpfung

Wenn  $\beta^2 < \omega_0^2$  gilt, dann wird die Wurzel für die Lamda negativ und wir erhalten komplexe Ergebnisse. Wir betrachten die Gleichung für die Koeffizienten  $\lambda$ :

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{-1 \cdot (\omega_0^2 - \beta^2)}$$

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm i\omega \quad | \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

Wir erhalten jetzt also für  $\omega$  eine andere Frequenz, die wegen der Bedingung nicht negativ werden kann. Wir das komplexe  $i$  allerdings trotzdem in der Gleichung haben.

Wir setzen die allg. Lösung zusammen:

$$x(t) = a_1 e^{(-\beta+i\omega)t} + a_2 e^{(-\beta-i\omega)t}$$

$$x(t) = \underbrace{e^{-\beta t}}_{\text{Dämpfung}} \underbrace{(a_1 e^{i\omega t} + a_2 e^{-i\omega t})}_{\text{Amplitude Schwingung mit Frequenz } \omega}$$

Mithilfe der Anfangsbedingungen (das ist son trust me bro ding) erhält man:

$$x(t) = e^{-\beta t} \left( x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0 + \beta x_0}{\omega} \sin(\omega t) \right)$$

Das System schwingt mit Frequenz  $\omega > 0$  und die Amplitude ist exponentiell gedämpft.

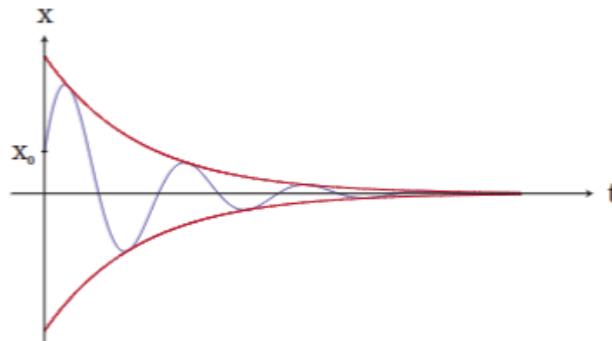


Figure 5: Schwingung wenn gedämpft

### Kritische Dämpfung

In diesem Fall ist  $\omega = 0$ , also gibt es nur eine Lösung.

$$\lambda = -\beta$$

Wir müssen also den Spezialfall anwenden 4. Also wir erhalten die Zweite Lösung durch multiplizieren der ersten Lösungsfunktion mit der unabhängigen Variable:

$$x(t) = a_1 e^{-\beta t} + a_2 \cdot t \cdot e^{-\beta t}$$

Mithilfe der Anfangsbedingungen ( $x(0) = x_0$  und  $\dot{x}(0) = v_0$ ) erhält man die Funktionen für  $a_i$   
Also:

$$x(t) = e^{-\beta t} (x_0 + (v_0 + \beta x_0) t)$$

Es gibt also keine Schwingung mehr. Außer vllt., einen Nulldurchgang, aber nicht mehr.

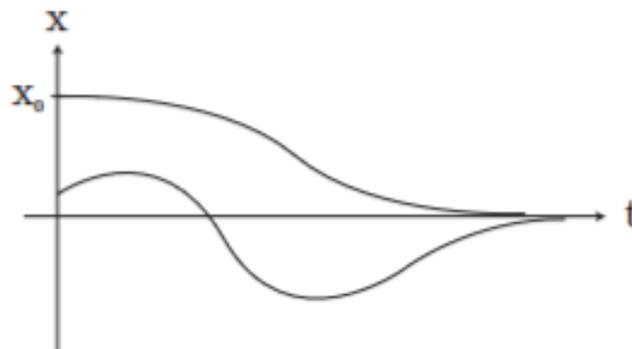


Figure 6: Kritische Dämpfung

## Starke Dämpfung

Wenn gilt, dass  $\beta^2 > \omega_0^2$ , dann wird die Wurzel niemals negativ, also erhalten wir keine komplexen Zahlen und damit in diesem Zusammenhang auch keine Schwingung mehr.

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \gamma$$

Dabei ist  $\gamma = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$ . Wie man erkennt, ist gilt:

$$0 < \gamma < \beta$$

Es liegt also nur noch ein exponentieller Abfall vor.

$$x(t) = e^{-\beta t} (a_1 e^{\gamma t} + a_2 e^{-\gamma t})$$

mit:

$$a_1 = \frac{1}{2} \left( x_0 + \frac{v_0 + \beta x_0}{\gamma} \right)$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \left( x_0 - \frac{v_0 + \beta x_0}{\gamma} \right)$$

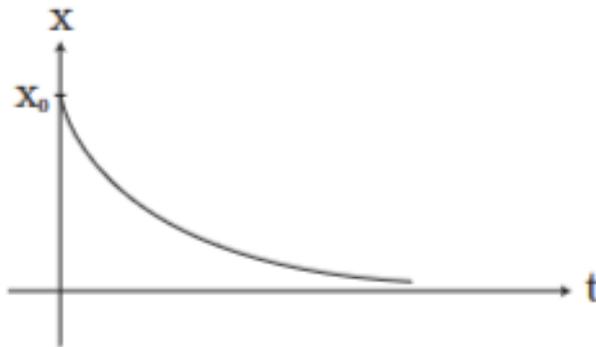


Figure 7: Starke Dämpfung

### 2.7.3 Getriebener Harm Oszillator

Mechanisches System: das System wird von aussen mit Frequenz  $\omega$  getrieben.

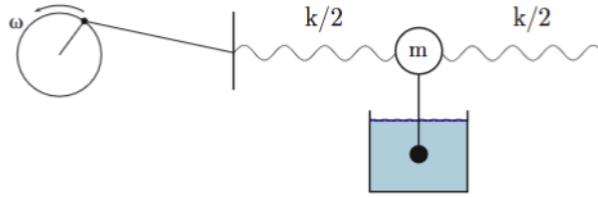


Figure 8: Getriebener harm. Oszillator

Dabei ist dann die DLG nicht mehr homogen.

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t)$$

Um diese jetzt schön mit dem Exponentialansatz lösen zu können, setzen wir diese ins Komplexe fort. Also wir ersetzen  $x \in \mathbb{R}$  mit  $z \in \mathbb{C}$ . Wir Betrachten später also nur noch den Realteil für die Lösung.  $x(t) = \text{Re}(z(t))$ . Deswegen können wir  $\cos \varphi = e^{i\varphi}$  schreiben.

$$\ddot{z} + 2\beta\dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}$$

Erinnerung: inhomogene DGL Lösen, indem wir zuerst die Homogene Lösen und dann eine spezielle Lösung finden.

Den Homogenen Teil dieser DGL haben wir bereits durch den gedämpften Oszilator gegeben.

$$x(t) = x_{hom}(t) + x_0(t)$$

Dabei nimmt  $x_{hom}$  mit der Zeit exponentiell ab, nach einem Einschwingvorgang dominiert also  $x_0(t)$ . Diese Lösung suchen wir also:

Dafür nutzen wir den Exponentialansatz:

$$z(t) = A e^{i\omega t}$$

Dabei gilt aber  $A \in \mathbb{C}$ , dadurch kann man  $A$  auch mit der komplexen E Funktion Darstellen.

$$z(t) = |A| e^{i\varphi} e^{i\omega t}$$

Dadurch können wir die Form der Lösung  $x_0 \in \mathbb{R}$  erraten.

$$x_0(t) = |A| \text{Re}(e^{i\varphi} e^{i\omega t}) = |A| \cos(\omega t + \varphi)$$

Es fehlt also der Betrag von A und der Phasenwinkel der Zahl A.

Wir setzen den Exponentialansatz  $z(t) = A e^{i\omega t}$  in die Differentialgleichung ein:

$$\begin{aligned} 0 &= -A\omega^2 e^{i\omega t} + 2\beta i\omega A e^{i\omega t} + \omega_0^2 A e^{i\omega t} - \frac{F_0}{m} e^{i\omega t} \\ 0 &= \underbrace{\left( A(-\omega^2 + 2\beta i\omega + \omega_0^2) - \frac{F_0}{m} \right)}_{=0} e^{i\omega t} \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Zahl A als:

$$A = -\frac{F_0}{m} \frac{1}{(\omega^2 - \omega_0^2) - 2i\beta\omega} = -\frac{F_0}{m} \frac{(\omega^2 - \omega_0^2) + 2i\beta\omega}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}$$

Hier wurde der Bruch mit dem Komplex konjugierten des Nenners erweitert, damit in der Darstellung von A kein Komplexer Teil im Nenner steht.

Wir erinnern uns, der Betrag  $|A|$  einer Komplexen Zahl, ist die Wurzel aus dem Produkt der Zahl mit seinem Komplex Konjugierten.

$$|A| = \sqrt{AA^*}$$

$$|A| = \frac{F_0}{m} \sqrt{\frac{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}{((\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\omega^2)^2}}$$

$$|A| = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

Nun kann man sich die Grenzfälle anschauen:

- $\omega \rightarrow 0, \quad \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{k}$
- $\omega \rightarrow \infty, \quad \frac{F_0}{m\omega^2}$

Wir man anhand der Formel für die Amplitude  $|A|$  erkennen kann, wird der Nenner  $\rightarrow 0$ , wenn die Anregerfrequenz gleich der Eienfrequenz des Schwingers ist, und die Dämpfung im Limes  $\beta \rightarrow 0$  geht. Dieses nennt man Resonanzkatastrophe.

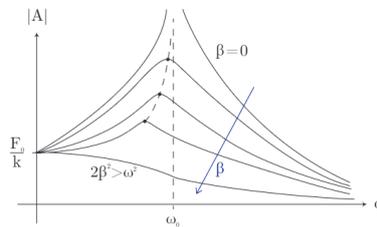


Figure 9: Resonanzkatastrophe

Nun suchen wir den noch Phasenwinkel der komplexen Zahl  $A$ , also  $\varphi$ .

Der Phasenwinkel ist der Winkel, den der 2D Vektor mit der Realen Achse in der komplexen Zahlenebene einschließt. Also gilt für den Phasenwinkel:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\text{Im}(A)}{\text{Re}(A)}\right)$$

mit:

$$\text{Re}(A) = -\frac{m}{F_0} |A|^2 (\omega^2 - \omega_0^2)$$

$$\text{Im}(A) = -2 \frac{m}{F_0} |A|^2 \beta \omega$$

Wir erinnern uns, die spezielle Lösung  $x_0(t)$  hatte die Form:

$$x_0(t) = |A| \cos(\omega t + \varphi)$$

Da wir nun  $|A|$  und  $\varphi$  ausgerechnet haben, haben wir die spezielle Lösung der DGL und damit auch die allg. Lösung der Inhomogenen.

Plottet man  $\varphi(\omega)$ , so erhält man folgendes Bild:

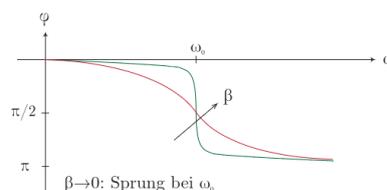


Figure 10:  $\varphi(\omega)$

Man erkennt, je kleiner die Dämpfung  $\beta$ , desto stärker ist ein Phasensprung bei  $\omega_0$  zu erkennen.

## 2.7.4 Fadenpendel

Bei einem Fadenpendel kann man die Gewichtskraft in einen Radialen und einen Winkelanteil zerlegen, wenn man sich in die Polarkoordinaten bezieht.

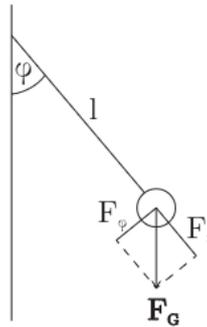


Figure 11: Fadenpendel

Es gilt also:

$$\begin{aligned}\vec{F}_G &= F_r e_r + F_\varphi e_\varphi \quad \text{mit} \\ F_r &= mg \cos \varphi \\ F_\varphi &= -mg \sin \varphi\end{aligned}$$

Die Bewegungsgleichung erhalten wir, indem wir  $\vec{r} = r e_r$  ansetzen (im Folgenden aufpassen und dran denken, dass  $\vec{r} \neq r$ ) und dann zweimal Ableiten um  $\ddot{\vec{r}}$ , also den Beschleunigungsvektor zu erhalten.

$$m\ddot{\vec{r}} = m[(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)e_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})e_\varphi] = (F_r + F_F)e_r + F_\varphi e_\varphi$$

Dabei ist  $F_F$  die Fadenspannung.

Die Fadenspannung ist das erste Beispiel für eine Zwangskraft, die garantiert, dass eine bestimmte Randbedingung eingehalten wird. Hier ist das die konstante Fadenlänge.

Wir wissen also, dass die Fadenlänge  $l = r$  konstant bleibt. Das heißt auch, dass (in Polarkoordinaten gedacht) die radiale Geschwindigkeit und Beschleunigung verschwindet (das Seil wird ja nicht länger).

$$\ddot{r} = \dot{r} = 0$$

Uns interessiert im weiteren nur die  $\varphi$ -Richtung. Deswegen kann man die Bewegungsgleichung vereinfachen zu:

$$\begin{aligned}ma_\varphi e_\varphi &= F_\varphi e_\varphi \\ mr\ddot{\varphi} &= -mg \sin \varphi \\ l\ddot{\varphi} &= -g \sin \varphi \\ 0 &= \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi\end{aligned}$$

Dies ist eine nichtlineare DGL, aber für kleine Winkel gilt:  $\sin \varphi \approx \varphi$  und wir erhalten:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0 \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Und dies entspricht wieder dem Harmonischen Oszillator.

## 2.8 Energie und Drehimpuls

### 2.8.1 Energie in einer Dimension (1D)

Wenn wir eine Kraft haben, die nur vom Raum abhängt (also nur wo eine Probemasse sich befindet und nicht wann und wie sie befindet (Scheiß auf die Gefühle der Probemasse)). Also die Kraft  $F$  ist nur von dem Ort abhängig.  $F(x)$ .

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F(x) \quad | \cdot \dot{x} \\ m\dot{x}\ddot{x} &= F(x)\dot{x} \end{aligned}$$

(Alles nur Skalare Größen, weil nur eine Dimension).

Wir erkennen, dass  $m\dot{x}\ddot{x}$  die Ableitung ist, von  $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$ , also wenden wir den Ableitungsoperator auf  $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$  an.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \right) = -\frac{d}{dt}V(x(t))$$

Wir suchen also eine Funktion  $V(x(t))$ , sodass die Ableitung dieser gerade  $F(x) \cdot \dot{x}$  ist.

Wir betrachten:

$$V(x) = - \int_a^x F(x') dx'$$

Dabei ist  $a$  beliebig, denn wir wollen ja erreichen, dass  $\frac{d}{dt}V(x) = F(x)\dot{x}$ . Wir schreiben also:

$$\frac{d}{dt}V(x) \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \frac{dV(x)}{dx} \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{\dot{x}}$$

Jetzt muss nur noch gelten, dass  $\frac{d}{dx}V(x) = F(x)$

$$\frac{d}{dt} \left( \int_a^x F(x') dx' \right) \stackrel{\text{Hauptsatz der Integralrechnung}}{=} \frac{d}{dt} (G(x) - G(a))$$

Dabei ist  $G'(x) = F(x)$ , also die Aufleitung von  $F$ .

Da  $G(a)$  konstant ist, fällt dies bei der Ableitung raus und es bleibt:

$$\frac{d}{dx}V(x) = F(x)$$

Dieses  $V(x)$  nenne wir Potential. Und ist die potentielle Möglichkeit eines Masseteilchens, Arbeit zu leisten.

Wenn wir ein Teilchen gegen eine äußere Kraft im Raum bewegen ist Arbeit  $W$  notwendig. Schauen wir uns die Arbeit an die notwendig ist, ein Teilchen um die Strecke  $dx$  gegen eine Kraft  $F(x)$  zu bewegen.

$$dW = -F dx$$

Die Arbeit  $dW$  wird als positiv definiert, wenn Arbeit entgegen der Kraft wirkt. Dann sagen wir dass das Teilchen Arbeit verrichtet. Wenn die  $dW$  negativ ist, also  $dW < 0$ , dann wird an dem Teilchen Arbeit verrichtet. Also wenn sich das Teilchen in Richtung der Kraft bewegt.

Schauen wir uns also die Arbeit an, die es benötigt ein Teilchen im Kraftfeld von  $x_1$  zu  $x_2$  zu bewegen, dazu integrieren wir.

$$W_{12} = - \int_{x_1}^{x_2} F(x') dx' = V(x_2) - V(x_1)$$

Also ist die Arbeit die Veränderung des Potentials. (Das minus im Integral wird durch das Minus in der Definition von  $V(x)$  rausgenuddelt)

Schauen wir uns nun wieder die Bewegungsgleichung an:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \right) = \frac{d}{dt}V(x) \quad | \int$$

Diese integrieren wir uns erhalten dann:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 = -V(x) + E$$

Dabei ist  $E$  die Integrationskonstante und weiter noch definieren wir  $\frac{1}{2}m\dot{x}^2 = T$  Dadurch erhalten wir die Energieerhaltung (Weil  $E$  als Int. Konstante ja konstant ist):

$$T + V = E = \text{konst}$$

Diese Energieerhaltung gilt allerdings wie gesagt nur für Kräfte, die nur vom Ort abhängen.  $F = F(x)$

Energie, Arbeit und Potential haben die gleiche Einheit  $J$  für Joule.

Die Energieerhaltung bedeutet eine starke Einschränkung der mögl. Teilchenbewegung, die man ohne Rechnung aus einem Plot des Potentials erschliessen kann. Wegen  $T \geq 0$  sind Bereiche mit  $V > E$  (klassisch) verboten (in der Quantenmechanik ist das anders). Die Punkte mit  $E = V$  sind Umkehrpunkte mit  $T = 0$  und deshalb  $v = 0$ . Die Extrema mit  $V'(x) = 0$  sind mögliche Ruhepunkte. In einer Mulde um ein Minimum gibt es bei entsprechender kinetischer Energie Oszillationen. Wenn ein Teilchen gegen eine Potentialbarriere anläuft und dann umkehrt, spricht man von Streuung (in höheren Dimensionen würde das Teilchen typischerweise zur Seite weggestreut werden)

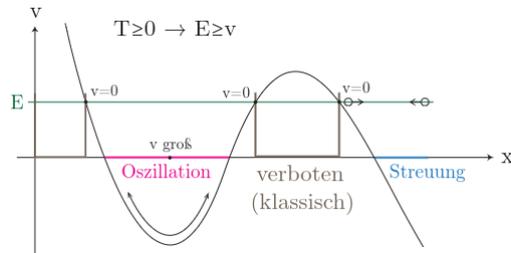


Figure 12: Potentiallandschaft für  $V(x)$

Durch diese Energieerhaltung können wir auch eine Bewegungsgleichung erhalten:

$$\frac{m}{2} \dot{x}^2 = E - V(x) \quad (6)$$

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m} (E - V(x))} \quad (7)$$

Nun schreiben wir  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$  und separieren die Variablen:

$$dt = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - V(x))}} dx$$

Dieses Integrieren wir:

$$\int_{t_0}^t dt = \int_{x_0}^x \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - V(x'))}} dx'$$

$$t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - V(x'))}} dx'$$

Damit kann man mit den entsprechenden anfangsbedingungen, dann  $t(x)$  ausrechnen, also das Integral lösen und dann  $t(x)$  umstellen zu  $x(t)$ .

Die Energieerhaltung gilt nicht mehr wenn  $F$  von  $\dot{x}$  oder von  $t$  abhängt.

## 2.8.2 Beispiele für Energie in 1D

HIER NOCH BEISPIELE AUSM SKRIPT UND EIGENE HINZUFÜGEN

### 2.8.3 Energie in 3D

Nun betrachten wir ein beliebiges Kraftfeld  $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$

Die Arbeit die nun notwendig ist, um ein Teilchen von  $p_1$  nach  $p_2$  zu verschieben ist:

$$W_{12} = - \int_{p_1}^{p_2} \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \cdot d\vec{r}$$

Das nennt man ein LinienIntegral, weil wir entlang einer Raumkurve integrieren und dabei den Infinitesimalen Vektor auf der Raumkurve  $d\vec{r}$  benutzen.

D.h. um das Integral auszurechnen brauchen wir eine parametrisierte Raumkurve  $r(\mu)$  (dabei ist  $\mu$  erstmal irgendein Parameter, mit dem sich die Kurve beschreiben lässt, i.d.R ist das die Zeit  $t$ ).

$$W_{12} = - \int_{\mu_1}^{\mu_2} \vec{F}(\vec{r}(\mu), \dot{\vec{r}}(\mu), t(\mu)) \cdot \frac{d\vec{r}(\mu)}{d\mu} d\mu$$

Erklärung zu  $d\vec{r} = \frac{d\vec{r}(\mu)}{d\mu} d\mu$ . Man kann sich das wie  $s = v \cdot t$  vorstellen, nur jetzt halt in infinitimalschreibweise und mit  $\mu$  als Parametrisierung und nicht  $t$ . d.h. der Infinitimale Vektor  $d\vec{r}$  ist das Produkt von seiner Änderung(geschwindigkeit) und der Parametrisierung

Dabei muss natürlich gelten, dass  $r(\mu_1) = p_1$  und  $r(\mu_2) = p_2$ , also die Parametrisierung auch die beiden Punkte, erreicht und durchläuft.

Dieses Integral ist im Allgemeinen abhängig von:

1. Kraftfeld
2. Endpunkten
3. Bewegungszustand (schnell, langsam)
4. Weg den wir wählen.

Daraus betrachten wir: in 1D:

$$dW = -F dx$$

Und in 3D:

$$\delta W = -\vec{F} \cdot d\vec{r} \quad | \text{kein totales Differential}$$

Betrachten wir im Folgenden die Bewegungsgleichung in 3D (herangehensweise wie bei 1D):

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \quad | \cdot \dot{\vec{r}}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 \right) = \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} = - \frac{dW_1}{dt}$$

Wir suchen also nun ein  $W_1$ , dessen Zeitliche Ableitung genau  $\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}$  ist. Die Arbeit über eine Parametrisierung haben wir ja bereits behandelt. Nun nutzen wir als Parametrisierung die Zeit und haben also eine Raumkurve  $r(t)$ . Dann wird das Arbeitsintegral zu:

$$W = - \int_{t_0}^t \vec{F}(\vec{r}(t'), \dot{\vec{r}}(t'), t') \cdot \frac{d\vec{r}(t')}{dt'} dt'$$

Weil  $\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt}$  ist das also die Lösung für  $W_1$  Wenn man das nun fortführt wie bei 1D so erhält man nach dem Integrieren:

$$T + W(c) = E$$

Dabei ist die Arbeit  $W(c)$  abhängig vom Weg  $c$  den wir wählen. Die Energie kann also nicht erhalten (konstant) sein, da wir für  $c$  jeden beliebige Weg wählen können, sich das aber nicht mit  $T$  ausgleicht.

Wenn wir fordern, dass  $T(c) \propto W(c)$ , dann können wir uns einen Fall bauen, sodass das Kraftfeld nicht konservativ ist, aber die Energie trotzdem Erhalten, weil ich bei jedem Weg  $c_i$ , die Arbeit und die kinetische Energie so regulieren, dass die Energie konstant ist.

HIER EINMAL FACKCHECKEN

Es gibt allerdings eine Unterklasse von Kraftfeldern, deren Arbeit  $W_{12}$  von Punkt 1 zu 2 unabhängig vom Weg ist. Diese heißen konservative Kraftfelder.

Ein Kraftfeld ist konservativ, wenn es ein skalarfeld  $V(\vec{r})$  gibt, sodass:

$$\vec{F} = -\nabla \cdot V(\vec{r})$$

Dieses Skalarfeld nennen wir dann wieder Potential. Dann ist die Arbeit wieder die Differenz des Potentials. Betrachten wir wieder die Bewegungsgleichung, genauer den rechten Teil:

$$\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} = -\nabla V(\vec{r}) \cdot \dot{\vec{r}} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dt}\right) = -\frac{dV}{dt}$$

Es gilt also wieder:

$$W_{12} = V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2)$$

Damit kann man zeigen, dass die Zeitableitungen der kinetischen Energie und des Potentials in Summe wieder Null ist:

$$\dot{T}(\dot{\vec{r}}) + \dot{V}(\vec{r}) = 0$$

Weil die Zeitableitung von  $T$  ist ja  $m\dot{\vec{r}}\ddot{\vec{r}}$  und von  $V$  ist  $-\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}$  und damit die Summe 0.

Also ist:

$$\dot{E} = 0$$

Daraus folgt direkt:

$$T + V = E = \text{konst.}$$

Kräfte sind entweder konservativ ( $\dot{E} = 0$ ) oder dissipativ ( $\dot{E} \neq 0$ ):

$$\vec{F} = \vec{F}_{\text{kons}} + \vec{F}_{\text{diss}}$$

### Konservative Kräfte erkennen:

Es gibt mehrere Kriterien, mit denen man Kräfte überprüfen kann:

1.  $\vec{F} = -\nabla V(\vec{r})$
2.  $\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} = -\frac{dV(\vec{r}(t))}{dt}$
3.  $\nabla \times \vec{F} = \text{rot} \vec{F} = 0$
4. Angegebene Wegunabhängigkeit

Ein konservatives Kraftfeld leistet auf einem geschlossenem Weg keine Arbeit:

$$0 = \oint_C dV = \oint_C \nabla V \cdot d\vec{r} = - \underbrace{\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}}_{\text{Arbeit}}$$

### Beispiele für konservative Kräfte

- Schwerfeld der Erde
- radialsymmetrisches Kraftfeld

#### 2.8.4 Drehimpuls in 3D

Betrachten wir nun den Drehimpuls. Dazu starten wir wieder mit dem Newtonschen Gesetz und Vektorproduktieren von links den Ortsvektor.

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \quad | \vec{r} \times$$

Wir erhalten:

$$m(\vec{r} \times \ddot{\vec{r}}) = \vec{r} \times \vec{F}$$

Wir erkennen, dass links eine Zeitableitung nach dem Impuls steht:

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \dot{\vec{p}}) = m \cdot \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \stackrel{\text{Produktregel}}{=} m \underbrace{(\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + \vec{r} \times \ddot{\vec{r}})}_{=0} = m(\vec{r} \times \ddot{\vec{r}})$$

Wir erkennen also, dass das Drehmoment die zeitliche Ableitung des Drehimpulses ist.

### Drehmoment

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Und dann das **Drehmoment**:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

und der normale Impuls:

$$\vec{p} = m\dot{\vec{r}}$$

Da  $\dot{\vec{L}} = \vec{M}$  (Drehimpulssatz) gilt, erkennen wir, dass der Drehimpuls erhalten bleibt, wenn das Drehmoment  $\vec{M} = 0$  ist.

Aus der Definition für das Drehmoment  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$  geht hervor, dass es genau dann Null wird, wenn:

- $\vec{F} = 0$  – Trivialer Fall
- $\vec{r} = 0$  – ergibt keinen Sinn (gibt uns keine Infos)
- $\vec{F} \parallel \vec{r}$ , also die Kraft parrall zum Ortsvektor wirkt

⇒ ALLE radialsymmetrischen Zentralfelder sind also Drehimpulserhaltend (und Energieerhaltend)

## 2.9 3-Keplergesetze

Die drei Keplerschen Gesetze sind:

1. Die Planetenbahnen sind Ellipsen, mit der Sonne in einem der Brennpunkte.
2. Der Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten, gleiche Flächen.
3. Die Quadrate der Umlaufzeiten, verhalten sich wie die Kuben (<sup>3</sup>) der großen Halbachsen.

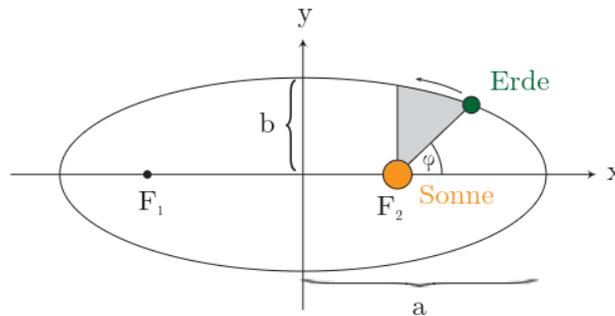


Figure 13: Keplerbahn

### Kraftfeld

Betrachten wir zunächst das Kraftfeld, in dem die Planeten sich bewegen.

$$\vec{F}_G = f_{\text{gravi}} \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{e}_r = -\frac{\alpha}{r^2} \vec{e}_r \quad | \quad \alpha = f_{\text{gravi}} \cdot m_1 m_2$$

Man erkennt, dass dieses Kraftfeld radialsymmetrisch ist und ein Potential  $V(\vec{r})$  besitzt, sodass:

$$\vec{F}_G = -\nabla V(r) \quad \text{mit} \quad V(r) = -\frac{\alpha}{r}$$

Das Minus für das Potential kommt aus der Definition  $F = -\nabla V$  und das Minus aus dem Ableiten wird mit dem Minus vom Potential  $V$  selbst zum Plus.

Aus diesen Fakten können wir bereits mehrere Dinge schließen. Das Kraftfeld ist der negative Gradient eines Potentials (Skalarfeld) und es ist ein Radialfeld es folgt:

1. Drehimpulserhaltung:  $\vec{L} = \text{const}$
2. Energieerhaltung:  $T + V = E = \text{const}$

Aus der Drehimpulserhaltung können wir bereits folgern, dass die Bewegung  $\vec{r}$  sich in einer Ebene befindet. Denn es gilt:

$$\vec{r} \cdot \vec{L} = m \vec{r} \cdot (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = 0$$

Man nehme sich also einen Beliebigen Ortsvektor  $\vec{r}$ , man erkennt, dass dieser Ortsvektor Senkrecht auf  $L$  steht (weil  $\vec{r} \cdot \vec{L} = 0$ ), da  $L$  aber zeitlich konstant ist, bewegt sich dieser nicht. Also erfüllen nur Ortsvektoren  $\vec{r}$  die Bedingung, die senkrecht zu  $\vec{L}$  stehen und damit spannen diese eine Ebene auf.

### 2.9.1 2tes Keplersches Gesetz.

Der Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.  
 Dazu schauen wir zunächst die Überstrichene Fläche des Fahrstrahl an.

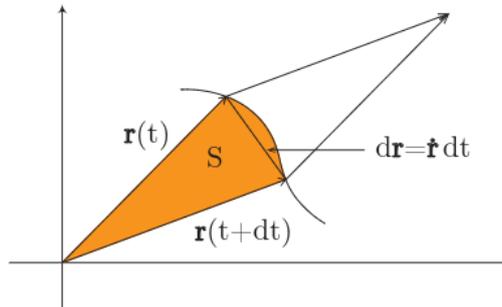


Figure 14: Fahrstrahl

Wir erinnern uns, dass der Betrag des Kreuzproduktes genau der Fläche des Parallelogramms entspricht, welches von den Vektoren aufgespannt wird.

Betrachten wir also das Parallelogramm des Ortsvektors  $\vec{r}(t)$  und des Vektors nach der Zeit  $dt$ , also  $\vec{r}(t+dt)$ , so erhalten wir die doppelte Fläche des in der Zeit  $dt$  überschrittenen Fläche. Es gilt also:

$$\begin{aligned} dS &= \frac{1}{2} |\vec{r}(t) \times \vec{r}(t+dt)| = \frac{1}{2} |\vec{r}(t) \times (\vec{r}(t) + \dot{\vec{r}}(t)dt)| \quad \text{siehe skizze} \\ &= \frac{1}{2} |\vec{r}(t) \times \dot{\vec{r}}(t)| dt \\ &= \frac{1}{2m} |\vec{L}| dt \end{aligned}$$

Daraus können wir folgern:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2m} |\vec{L}| = \text{const}$$

### 2.9.2 1. Keplersches Gesetz

Wir wissen also dass es sich um eine Bewegung in einer Ebene handelt, wir nutzen also Polarkoordinaten.

$$\begin{aligned} \vec{r} &= r e_r \\ \dot{\vec{r}} &\stackrel{\text{Produktregel}}{=} \dot{r} e_r + r \dot{\varphi} e_\varphi \end{aligned}$$

Dies setzen wir nun für den Drehimpuls ein.

$$\begin{aligned} \vec{L} &= m(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \\ &= m(r e_r \times r \dot{\varphi} e_\varphi) \quad | \text{ der } e_r \text{ Termn fällt wegen Kreuzprodukt weg} \\ &= m r^2 \dot{\varphi} (e_z) \end{aligned}$$

Umstellen nach  $\dot{\varphi}^2$ , da wir das später brauchen.

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{L^2}{m^2 r^4}$$

Unser Ziel ist es ja, zu zeigen dass die Bahnkurven Ellipsen sind. Wir wollen also wissen wie die Raumkurve  $\vec{r}$  aussieht.

Dazu schauen wir uns zunächst die Energieerhaltung an:

$$\begin{aligned} E &= T + V = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 + V(r) \quad | \text{ Definition von } \dot{\vec{r}} \text{ einsetzen} \\ &= \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + V(r) \quad | \text{ Der mittlere Teil der Bino verschwindet, weil die Einheitsvektoren senkrecht stehen} \\ &= \frac{m}{2} \dot{r}^2 + V_{eff}(r) \end{aligned}$$

Dabei setzt sich  $V_{eff}(r)$  zusammen aus dem ursprünglichen Potential  $V(r)$  und dem Term, der Winkelgeschwindigkeit, also:

$$V_{eff} = V(r) + \frac{m}{2} r^2 \dot{\varphi}^2$$

Dieser Term wandert zum Potential, weil er nicht von  $\dot{r}$  abhängt, also nicht für  $T$  relevant. Nun ersetzen wir noch  $\dot{\varphi}^2$ , also wird  $V_{eff}(r)$  zu:

$$V_{eff}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2}$$

Damit haben wir das Problem von 2D auf 1D reduziert, (Winkelanteile wären zweite Dimension gewesen, aber dieser Verschwinden durch den konstanten Drehimpuls).

Plottet man nun  $V_{eff}$ , so erhält man wieder eine Potentiallandschaft, derer man die gebundenen Zustände ablesen kann:

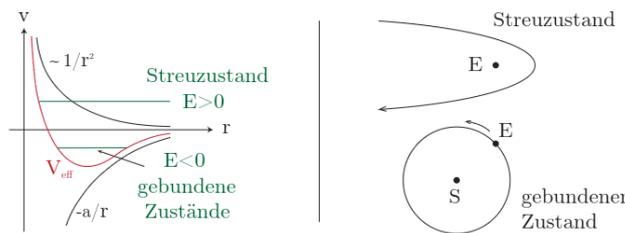


Figure 15: Links Potentiallandschaft und Rechts Bewegungen

Man erkennt, dass der Anteil des "Drehimpulspotentials":  $\sim \frac{1}{r^2}$ , die sogenannte Zentrifugalbarriere schaffen. Sie hält also das Teilchen vom Ursprung fern.

Da wir nun in einer Dimension sind, können wir durch die Energieerhaltung  $E = T + V_{eff}(r)$  nach der Geschwindigkeit umstellen.

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m} (E - V_{eff}(r))}$$

Schreiben wir nun wieder  $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$  und Separieren die Variablen, können wir Integrieren und erhalten:

$$t - t_0 = \int_{r_0}^r \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - V_{eff}(r'))}} dr'$$

Aufgrund der Form von  $V_{eff} = V(r) + \frac{\xi}{r^2}$  ist dieses Integral erstmal doof zu Lösen. Deswegen machen wir das nicht!

Wir interessieren uns gerade ja nicht für eine explizite Funktion  $r(t)$ , sondern wollen die geometrische Form der Bewegung betrachten. Dazu reicht es aus sich  $r(\varphi)$  anzuschauen.

So erhalten wir zwar keine Raumkurve, die von der Zeit abhängt, aber von  $\varphi$ , also einfach eine andere Parametrisierung.

Das machen wir nicht um das Integral besser lösen zu können, sondern wir gehen einen anderen Weg um auf die Raumkurve zu kommen

Eine weitere Schwierigkeit bleibt dennoch, dass wir im Effektiven Potential

$$V_{eff}$$

$1/r$  Terme besitzen. Um diese loszuwerden betrachten wir den Reziproken Radius:

$$s = \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{1}{r(\varphi)} = s(\varphi)$$

Nun schauen wir uns das Differential  $\frac{ds}{d\varphi}$  an. (Trust me ergibt gleich Sinn):

$$\begin{aligned} \frac{ds}{d\varphi} &= \frac{ds}{d\varphi} \frac{dt}{dt} \stackrel{*_1}{=} \frac{ds}{dt} \frac{dt}{d\varphi} \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{r} \right) \frac{dt}{d\varphi} \stackrel{\text{Umkehrregel}}{=} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{r} \right) \frac{1}{\frac{d\varphi}{dt}} \\ &= -\frac{\dot{r}}{r^2} \frac{1}{\dot{\varphi}} \stackrel{\text{Definition von } \varphi}{=} -\frac{\dot{r}}{r^2} \frac{mr^2}{L} = -\dot{r} \frac{m}{L} \end{aligned}$$

SO erhalten wir also eine Formel für  $\dot{r}$ , die unsere neuen Parameter  $s$  und  $\varphi$  beinhaltet und diese in Zusammenhang setzt.

Kurze Anmerkung zu  $*_1$ , man darf diese Differentialoperatoren so vertauschen, weil wir hier Skalare Funktionen vorliegen haben und dann die Totale als auch die Partielle Ableitungen zusammenfallen. Also hier gilt  $\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x}$  und dann können wir die Ableitungen vertauschen (siehe Höma skript von kommutativität von partiellen Ableitungen)  
Eine weitere Anmerkung zur Umkehrregel, diese ist hier legitim, da die Funktion  $\varphi(t)$  selbst bijektiv ist.

Wir stellen nach  $\dot{r}$  um.

$$\dot{r} = -\frac{L}{m} \frac{ds}{d\varphi}$$

Erinnerung: Wir betrachten bei Keplerproblemen immer ein  $1/r$ - Potential, also hier  $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$   
Nun schreiben wir den Energieerhaltungssatz mit diesem Potential auf (in Polarkoords):

$$E = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{L}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}$$

Wir ersetzen nun  $s = \frac{1}{r}$  sowie  $\dot{r} = -\frac{L}{m} \frac{ds}{d\varphi}$  in diese Formel und erhalten:

$$E = \frac{L^2}{2m} \left[ \left( \frac{ds}{d\varphi} \right)^2 + s^2 \right] - \alpha s$$

Beachte, hier ist das Differential quadrat gemeint, KEINE doppelte Ableitung!

Nun müssen wir wieder ein bisschen Tricksen um dies zu vereinfachen. Wir differenzieren beide Seiten mit  $\frac{d}{d\varphi}$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varphi} E &= \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{L^2}{2m} \left[ \left( \frac{ds}{d\varphi} \right)^2 + s^2 \right] - \alpha s \right) \\ 0 &= \frac{L^2}{2m} \left( 2 \frac{ds}{d\varphi} \frac{d^2 s}{d\varphi^2} + 2s \frac{ds}{d\varphi} \right) - \alpha \frac{ds}{d\varphi} \end{aligned}$$

Stellen wir diese um erhalten wir eine Differentialgleichung zweiter Ordnung ( $\dot{s}$  kürz sich):

$$\frac{d^2 s}{d\varphi^2} + s = \frac{\alpha m}{L^2}$$

Nun legen wir eine neue Variable fest, damit wir nicht immer soviel schreiben müssen:

$$k = \frac{L^2}{\alpha m}$$

Dann sieht die DGL so aus:

$$\frac{d^2 s}{d\varphi^2} + s = \frac{1}{k}$$

Wir erkennen die DGL des harmonischen Oszilators und kennen die Lösung dazu:

$$s(\varphi) = \underbrace{A \sin \varphi + B \cos \varphi}_{\text{allg. Lösung der homogenen}} + \underbrace{\frac{1}{k}}_{\text{spezielle Lösung}}$$

Die Konstanten A und B ermitteln wir, wie immer mit den Anfangsbedingungen. Dabei legen wir fest, dass bei  $\varphi = 0$  der nächste Punkt zur Sonne sein soll ( $r$  minimal sein soll  $\Rightarrow s$  maximal). So ergibt sich:

$$A = 0$$

Wir definieren  $\epsilon = kB$ , dann lässt sich schreiben:

$$s = \frac{1}{r} = \frac{1}{k}(1 + \epsilon \cos \varphi)$$

Mit geometrischen Überlegungen kann man nun zeigen, dass für  $0 < \epsilon < 1$  die wirklich eine Ellipse ist.

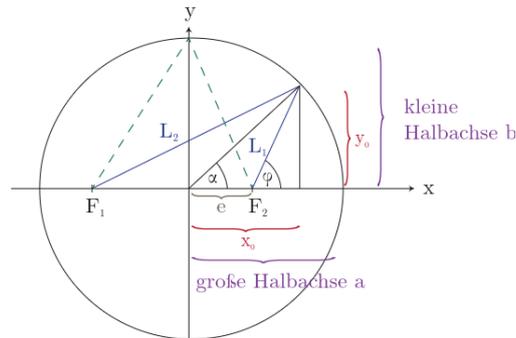


Figure 16: Ellipsen

Die wichtigsten Zusammenhänge sind dabei:

$$\epsilon = \frac{e}{a} \quad k = \frac{b^2}{a}$$

Die Formel:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{k}(1 + \epsilon \cos \varphi)$$

ist tatsächlich die allgemeine Formel für Kegelschnitte. Im Fall  $\epsilon > 1$  ergeben sich aus dieser Formel Hyperbeln und Parabeln, also genau die Streuzustände unseres Potentials.

Die Geometrischen Größen können dabei mit den Physikalischen wie folgt im Bezug gesetzt werden:

$$k = \frac{b^2}{a} = \frac{L^2}{\alpha m}$$

$$a = -\frac{\alpha}{2E}$$

$$b = \frac{L}{\sqrt{-2mE}}$$

Die große Halbachse  $a$  folgt also aus der mechanischen Gesamtenergie  $E$ . Da wir gebundene Zustände (Ellipsen) betrachten, gilt  $E < 0$ . Die kleine Halbachse  $b$  folgt dann mit dem Drehimpuls  $L$ .

### 2.9.3 3.tes Keplersches Gesetz

Die Quadrate der Umlaufzeiten, verhalten sich wie die Kuben (<sup>3</sup>) der großen Halbachsen.

Das ist im Grunde eine Folgerung der ersten beiden Gesetze. Wenden wir das 2te Gesetz mal auf die Fläche  $S$  an, die in der Zeit eines Umlaufs überschritten wird.

$$S = \pi ab = T \frac{L}{2m}$$

Letztes erhält man durch Integration der Gleichung  $\frac{dS}{dt} = \frac{L}{2m}$ , die wir fürs 2te Keplersche Gesetz hergeleitet hatten.

Diese Gleichung stellen wir nun nach  $T$  um:

$$T = \frac{2m\pi ab}{L}$$

Nun quadrieren wir die Gleichung und erweitern beide Seiten mit  $\frac{1}{a^3}$ :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{\pi^2 a^2 b^2 4m^2}{L^2 a^3} \quad | \text{ Definition von } k \text{ verwenden}$$

$$= \frac{4\pi^2 m^2 k}{L^2} \quad \text{Wieder def von } k \quad \frac{4\pi^2 m}{\alpha}$$

$$= \frac{4\pi^2}{m_s \gamma} = \text{konst.} \quad | \text{ Für Gravipotential konst.}$$

Mit der Masse der Sonne  $m_s$  und der Gravikonstante  $\gamma$  ist das für alle Planeten im Sol System gleich.

## 2.10 Annahme von Puntteilchen

Siehe Schwarz-skript. Ist sicherlich nicht klausurrelevant und v.a. ist es voel doof.

### 3 Mehrteilchensysteme

#### 3.1 Notation

Wir betrachten nun Systeme mit  $N$  Teilchen, dabei bekommt jedes Teilchen einen Index  $i$ , dabei ist  $i$ , der Index für das Teilchen und nicht für z.B. Koordinaten eines Ortsvektors.

Die Koordinatne des  $i$ -ten Teilchens bezeichnen wir also folgend mit  $(x_i, y_i, z_i)$

$\vec{r}_i$ : Ortsvektor des  $i$ -ten Teilchens

$m_i$ : Masse des  $i$ -ten Teilchens

$\vec{F}_i$ : Gesamtkraft auf das  $i$ -te Teilchen

$\vec{F}_{ij}$ : Kraft des Teilches  $j$  auf  $i$ .

Die Gesamtkraft auf ein Teilchen setzt sich aus den äußeren Kräften und den inneren Kräften zusammen:

$$\vec{F}_i = \underbrace{\vec{F}_i^{ext}}_{\text{äußere Kraft}} + \underbrace{\sum_{j=1}^N \vec{F}_{ij}}_{\text{inneren Kräfte}}$$

Wir nennen ein System abgeschlossen wenn keine Äußeren Kräfte  $\vec{F}_i^{ext} = 0$  wirken.

Die Kraft von einem Teilchen  $j$  auf ein anderes  $i$   $\vec{F}_{ji}$  ist in der klassischen Mechanik (actio = reactio) Im Betrag identisch und in der Richtung genau entgegengesetzt. Es gilt also:

$$\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$$

Außerdem kann kein Teilchen eine Kraft auf sich selbst auswirken, es folgt also weiterhin:

$$\vec{F}_{ii} = 0$$

#### 3.2 Erhaltungssätze

Betrachten wir zunächst die inneren Kräfte. Genauer die Summe über alle Inneren Kräfte:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j}^N \vec{F}_{ij} &\stackrel{\star_1}{=} \frac{1}{2} \left( \sum_{i,j} \vec{F}_{ij} + \sum_{i,j} \vec{F}_{ij} \right) \stackrel{\star_2}{=} \frac{1}{2} \left( \sum_{i,j} \vec{F}_{ij} + \sum_{i,j} \vec{F}_{ji} \right) \\ &\stackrel{F_{ij} = -F_{ji}}{=} \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\vec{F}_{ij} - \vec{F}_{ij}) = \vec{0} \end{aligned}$$

$\star_1$  Das ist der Trick:  $a = \frac{1}{2}(a + a)$

$\star_2$  Hier wurden einfach die Indizes umbenannt. Wie der Indize heißt ist ja egal, solange es innerhalb des Summenzeichens konstant ist.

Man erkennt also, dass die inneren Kräfte Wegfallen, wenn wir über diese Summieren

Darauf folgt auch:

$$\sum_i m_i \vec{\ddot{r}} = \sum_i \vec{F}_i^{ext}$$

Wir definieren nun neue Vektoren, die die jeweils summierten Größen enthalten, damit wir nicht immer das Summensymbol schreiben müssen.

- $\vec{F}^{ext} = \sum_i \vec{F}_i^{ext}$  Gesamtkraft extern
- $M = \sum_i m_i$  Gesamtmasse
- $\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$  Schwerpunkt

Dadruch lässt sich der folgende Satz schön Kompakt schreiben.

### 3.2.1 Schwerpunktsatz

Der Schwerpunkt bewegt sich so, als ob die Gesamte Masse in ihm vereint wäre und die äußere Kraft auf ihn wirkt. Die inneren Kräfte spielen keine Rolle.

$$M\ddot{\vec{R}} = \vec{F}^{ext}$$

### 3.2.2 Impuls

Der Gesamtimpuls ist gegeben als:

$$\vec{P} = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i$$

Die zeitliche Ableitung liefert:

$$\dot{\vec{P}} = M\ddot{\vec{R}} = \vec{F}^{ext}$$

Für ein abgeschlossenes System, also ein system auf welches keine äußeren Kräfte wirken, gilt die Impulserhaltung:

$$\vec{F}^{ext} = 0 \Rightarrow \dot{\vec{P}} = 0$$

### 3.2.3 Drehimpuls

Der Gesamtdrehimpuls soll die Summe aller Einzelnendrehimpulse sein, also:

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_i \vec{L}_i \\ &= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i \\ &= \sum_i m_i (\vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i) \end{aligned}$$

Betrachten wir nun die Zeitableitung des Drehimpulses ( $\frac{d}{dt}\vec{L} = \dot{\vec{L}}$ ), um Rückschlüsse auf das Drehmoment zu erhalten:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{L}} &\stackrel{\text{Produktregel}}{=} \sum_i m_i [(\dot{\vec{r}}_i \times \dot{\vec{r}}_i) + (\vec{r}_i \times \ddot{\vec{r}}_i)] = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i \\ &\stackrel{\text{Definition von } F_i}{=} \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{ext}) + \sum_{i,j} (\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}) \end{aligned}$$

Für Zentralkräfte gilt:

$$F_{ij} \parallel (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

Da  $\vec{r}_i - \vec{r}_j$  ja der Vektor zwischen den Beiden Teilchen ist, und die Kraft, wenn Zentralkraft auch genau zwischen den beiden wirkt.

Betrachten wir nun den letzten Termn von  $\dot{\vec{L}}$ :

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} &\stackrel{*1}{=} \frac{1}{2} \sum_{i,j} [(\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}) - (\vec{r}_j \times \vec{F}_{ij})] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} \stackrel{\text{weil parallel } \vec{0}}{=} \vec{0} \end{aligned}$$

Für den Fall von Zentralkräften folgt damit dann also:

$$\dot{\vec{L}} = \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{ext}) = \vec{M}^{ext}$$

Für ein geschlossenes System (also keine Externen Kräfte) gitl damit Impulserhaltung:

$$\vec{M}^{ext} = 0 \Rightarrow \dot{\vec{L}} = konst$$

Im weiteren wollen wir den Drehimpuls noch in Anteile zerlegen, die auf den Schwerpunkt selbst wirken, und jene die relativ dazu wirken.

Wir wissen, dass der Vektor  $\vec{R}$  zum Schwerpunkt  $M$  zeigt. Also können wir den Ortsvektor eines Teilchens  $m_i$  auch im Bezug auf den Schwerpunkt anschauen.

$$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}'_i$$

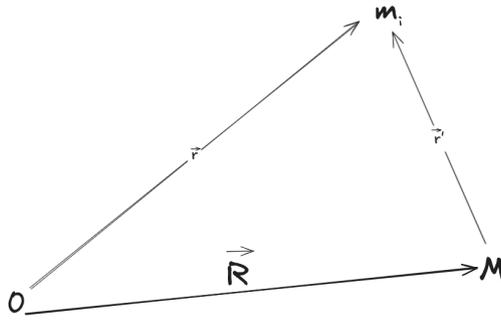


Figure 17: Relativkoordinaten

Betrachten wir im folgenden die Schwerpunktskoordinate bezüglich dieser Relativkoordinaten:

$$\square_1 : \quad \sum_i m_i \vec{r}'_i \stackrel{\text{Def. } \vec{r}'_i}{=} \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{R}) = M\vec{R} - M\vec{R} = \vec{0}$$

Die Schwerpunktskoordinate ist also 0, in den Relativkoordinaten.

Betrachten wir also erneut den Gesamtimpuls:

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_i m_i (\vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i) = \sum_i m_i [(\vec{R} + \vec{r}'_i) \times (\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}'_i)] \\ &\stackrel{\text{Ausmultiplizieren}}{=} \sum_i m_i [(\vec{R} \times \dot{\vec{R}}) + (\vec{R} \times \dot{\vec{r}}'_i) + (\vec{r}'_i \times \dot{\vec{R}}) + (\vec{r}'_i \times \dot{\vec{r}}'_i)] \\ &= M(\vec{R} \times \dot{\vec{R}}) + \underbrace{(\vec{R} \times \sum_i m_i \dot{\vec{r}}'_i)}_{\square_1 \ 0} + \underbrace{(\sum_i m_i \vec{r}'_i \times \dot{\vec{R}})}_{\square_1 \ 0} + \sum_i m_i (\vec{r}'_i \times \dot{\vec{r}}'_i) \\ &= \underbrace{M(\vec{R} \times \dot{\vec{R}})}_{\vec{L}_s} + \underbrace{\sum_i m_i (\vec{r}'_i \times \dot{\vec{r}}'_i)}_{\vec{L}_r} \end{aligned}$$

Dabei ist also  $\vec{L}_s$  der Drehimpuls für Schwerpunkt und  $\vec{L}_r$  die Relativanteile des Drehimpulses. Der Gesamtimpuls hingegen hat nur einen Schwerpunktsanteil:

$$\vec{P} = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \stackrel{\text{Relativsystem}}{=} \sum_i m_i (\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}'_i) \stackrel{\square_1}{=} M\dot{\vec{R}}$$

### 3.2.4 Energie

Wir starten mit der Bewegungsgleichung eines einzelnen Massenpunktes und multiplizieren mit  $\dot{\vec{r}}_i$

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i \quad | \cdot \dot{\vec{r}}_i$$

$$m_i (\ddot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i) = \vec{F}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i$$

Summieren wir über  $i$  erhalten wir:

$$\sum_i m_i (\ddot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i) = \sum_i \vec{F}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i$$

Wir erkennen wieder eine Zeitableitung:

$$\sum_i \vec{F}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i = \frac{d}{dt} \left( \underbrace{\frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^2}_{=T} \right)$$

Noch wissen wir nicht wie die Kraft  $\vec{F}_i$  aussieht. Im allgemeinen Fall sieht ein Kraft (das Kraftfeld) als die Summe des konservativen Anteils und des dissipativen Anteils:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{\text{kons.}} + \vec{F}_i^{\text{diss}}$$

Der konservative Anteil der Kraft sollte man auch über das Potential bekommen.

$$\vec{F}_i^{kons.} = -\nabla_i V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$$

Dabei ist  $\nabla_i$  Der Gradient für das  $i$ -te Teilchen. Wobei der Index  $i$  darauf hindeutet, dass die partiellen Ableitungen lediglich die Koordinaten des  $i$ -ten Teilchens betreffen

#### Warum hängt VV von allen Ortsvektoren ab?

- Wechselwirkungen zwischen Teilchen: In einem System mehrerer Teilchen beeinflussen sich die Teilchen gegenseitig, z. B. durch Gravitationskräfte, elektrische Kräfte oder andere konservative Kräfte. Das Gesamtpotential  $V$  beschreibt diese Wechselwirkungen und hängt deshalb nicht nur vom Ort eines einzelnen Teilchens, sondern von der gesamten räumlichen Konfiguration ab.
- Kollektives Verhalten: Das Potential  $V$  ist eine Funktion der Positionen aller Teilchen, weil die Gesamtenergie des Systems (bzw. die potenzielle Energie) durch die Relationen zwischen den Teilchen definiert ist, z. B. durch Paarpotentiale  $V_{ij}$

#### Warum nicht ein individuelles $V_i(r)$ pro Teilchen?

Ein individuelles  $V_i(r)$  würde bedeuten, dass jedes Teilchen unabhängig von den anderen Teilchen ein eigenes Potential besitzt. Das ist in konservativen Systemen mit Wechselwirkungen nicht korrekt, da:

- Wechselwirkungen gekoppelt sind: Das Potential ist oft eine Summe von Beiträgen, die von Paaren von Teilchen abhängen, z. B.  $V = \sum_{i < j} V_{ij}$ . Das Potential eines Teilchens kann daher nicht isoliert von den anderen beschrieben werden.
- Abhängigkeit von allen Teilchen notwendig ist: Die Kraft  $F_i = -\nabla_i V$  auf ein Teilchen wird durch die Ableitung des Gesamtpotentials  $V$  nach der Position des Teilchens berechnet. Dieses Gesamtpotential enthält die Wechselwirkung mit allen anderen Teilchen.

Schauen wir uns das Potential also mal genauer an.

$V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$  ist also von allen Ortsvektoren abhängig. D.h. das Gesamtpotential bestimmt sich aus der Konfiguration des Gesamtsystems. Betrachten wir die Zeitableitung des Potentials (das ist ein Totales Differential, siehe Kapitel (iwo oben)):

$$\frac{dV}{dt} = \sum_i \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i} \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_i \nabla_i V \cdot \dot{\vec{r}}_i$$

Nun können wir alle Formeln von Oben einmal zusammensetzen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} T &= \sum_i \vec{F}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i = \sum_i (\vec{F}_i^{kons.} + \vec{F}_i^{diss.}) \cdot \dot{\vec{r}}_i \\ &= \sum_i \vec{F}_i^{kons.} \cdot \dot{\vec{r}}_i + \sum_i \vec{F}_i^{diss.} \cdot \dot{\vec{r}}_i \\ &= \sum_i -\nabla_i V \cdot \dot{\vec{r}}_i + \sum_i \vec{F}_i^{diss.} \cdot \dot{\vec{r}}_i \\ &= -\frac{dV}{dt} + \sum_i \vec{F}_i^{diss.} \cdot \dot{\vec{r}}_i \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\frac{d}{dt} (T + V) = \sum_i \vec{F}_i^{diss.} \cdot \dot{\vec{r}}_i$$

Wir erkennen, dass in einem konservativem System  $\vec{F}_i^{diss.} = 0$  die Zeitableitung von  $T + V$  null ergibt, und damit die Energieerhaltung gilt:

$$T + V = E = konst \quad | \text{Wenn } \vec{F}_i^{diss.} = 0$$

### 3.2.5 Gesamtpotential

Um das Gesamtpotential etwas genauer zu betrachten, brauchen wir neue Notationen:

- $x_{ij} = x_i - x_j$  analog für y,z
- $\nabla_{ij} = \left( \frac{\partial}{\partial x_{ij}}, \frac{\partial}{\partial y_{ij}}, \frac{\partial}{\partial z_{ij}} \right)$

Typischerweise haben wir für die inneren Kräfte konservative Zentralkräfte, d.h. es gibt Zwei-Körper-Potentiale, die nur vom Betrag des Abstandes abhängen:

$$V_{ij} = V_{ij}(r_{ij})$$

Dabei ist  $r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$  Betrachten wir also die Kraft zwischen Zwei Teilchen können wir diese Schreiben als:

$$\vec{F}_{ij} = -\nabla_i V_{ij} \stackrel{*3}{=} -\nabla_{ij} V_{ij} = +\nabla_{ji} V_{ij} \stackrel{*3}{=} \nabla_j V_{ij} = -\vec{F}_{ji} = \nabla_j V_{ji}$$

Anhand der letzten zwei Gleichheitszeichen erkennen wir, dass gilt:

$$V_{ij} = V_{ji}$$

Woraus wir folgern können, dass  $V_{ii} = 0$  und damit auch:

$$\vec{F}_{ii} = 0$$

Also kein Teilchen eine Kraft auf sich selbst ausübt.

Erklärung zu \*3

$$-\nabla_i V_{ij} = \left( \frac{\partial V_{ij}}{\partial x_i}, \frac{\partial V_{ij}}{\partial y_i}, \frac{\partial V_{ij}}{\partial z_i} \right) = \left( \frac{\partial V_{ij}}{\partial x_{ij}}, \frac{\partial V_{ij}}{\partial y_{ij}}, \frac{\partial V_{ij}}{\partial z_{ij}} \right) = -\nabla_{ij} V_{ij}$$

Also müssen wir nur noch zeigen warum gilt, dass  $\partial_i = \partial_{ij}$  (kurzschreibweise)

Das Potential  $V_{ij}(r_{ij})$  hängt ja nur von den relativ koordinaten  $r_{ij}$  ab. Komponentenweise kann man sagen, dass  $x_{ij} = x_i - x_j$  eine Funktion von  $x_i$  ist.

Also:

$$x_{ij} = x_{ij}(x_i)$$

Um dann also eine Funktion  $V_{ij}(r_{ij}) = V_{ij}(x_{ij}, y_{ij}, z_{ij})$  nur nach  $x_i$  abzuleiten brauchen wir die Kettenregel:

$$\frac{\partial V_{ij}}{\partial x_i} = \frac{\partial V_{ij}}{\partial x_{ij}} \frac{\partial x_{ij}}{\partial x_i}$$

Wir bilden die Ableitung von  $x_{ij} = x_i - x_j$  nach  $x_i$  und erkennen:

$$\frac{\partial x_{ij}}{\partial x_i} = 1$$

Damit ist gezeigt, dass gilt:

$$\frac{\partial V_{ij}}{\partial x_i} = \frac{\partial V_{ij}}{\partial x_{ij}}$$

Damit kann man auch sehen, warum der Indextausch des antisymmetrisch ist, also:

$$\nabla_{ij} = -\nabla_{ji}$$

Da ich hier dann nach  $x_j$  ableite und aus der Definition des  $x_{ij}$  erhalten wir dann das Minus.

Weiter oben haben wir gesehen, dass die Ableitung der Kinetischen Energie der Summe über die Kräfte mit den Geschwindigkeiten ergibt, also:

$$\frac{d}{dt} T = \sum_i \vec{F}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i$$

Betrachten wir also im Folgenden die Energieerhaltung, der Inneren Kräfte:

$$\begin{aligned} \sum_i \vec{F}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i &\stackrel{*4}{=} \sum_{i,j} \vec{F}_{ij} \cdot \dot{\vec{r}}_i \stackrel{*5}{=} \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\vec{F}_{ij} \cdot \dot{\vec{r}}_i + \vec{F}_{ji} \cdot \dot{\vec{r}}_j) \stackrel{*6}{=} \frac{1}{2} \sum_{i,j} \vec{F}_{ij} \cdot \dot{\vec{r}}_{ij} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} (-\nabla_{ij} V_{ij}) \cdot \dot{\vec{r}}_{ij} \stackrel{*7}{=} -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i,j} V_{ij} \end{aligned}$$

\*<sub>4</sub>: Weil die Kraft auf ein Teilchen  $i$ , gerade die Summe aller Wechselwirkenden Kräfte ist.

\*<sub>5</sub>: Wieder der  $a = \frac{1}{2}(a + a)$  Trick und dann Indizes umbenannt.

\*<sub>6</sub>: Hier wurde  $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$  benutzt und anschließend die Definition von  $r_{ij} = r_i - r_j$

\*<sub>7</sub>: Die Funktion  $V_{ij}(r_{ij})$  ist ja von  $r_{ij}$  abhängig, also ergibt sich nach der Kettenregel für diese Totale Differential die Summe aus den Einzelnen Ableitungen (also Nabla  $\nabla$ ) und die Zeitableitung des Ortes. (Dabei leiten wir  $V$  nicht nach dem Skalaren Abstand ab, sondern nach dem jeweiligen Vektor  $\vec{r}_{ij}$ )

Betrachten wir nun nichtmehr nur die inneren Kräfte sondern nun die Externe Kraft:

$$\vec{F}_i^{ext} = -\nabla_i V_i^{ext}(\vec{r}_i) = -\nabla V^{ext}$$

Wenn dabei  $V^{ext}$  wieder die Summe über alle Externen Potentiale ist.  $V^{ext} = \sum_i V_i^{ext}$

Damit können wir schreiben:

$$\sum_i \vec{F}_i^{ext} \cdot \dot{\vec{r}}_i = -\frac{d}{dt} \sum_i V_i^{ext}$$

Wir können also das Gesamte Potential schreiben (welches sich Addiert, wie die Kräfte) also Potential von inneren Kräften + Potential der äußeren Kräfte:

$$V_{ges}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \sum_i V_i^{ext}(\vec{r}_i) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ij}$$

Dieses Ergebnis macht Sinn, jedes Paarpotential kommt effektiv nur einmal vor.

### 3.2.6 Virial

Die Frage hierbei ist, wie groß die jeweiligen Beiträge der kinetischen Energie und der Potentiellen Energie zur Gesamtenergie haben.

Dabei untersuchen wir die Energien im Zeitlichen Mittel und betrachten zunächst nur **konservative Kräfte**. Dabei beginnen wir mit der Bewegungsgleichung, multiplizieren mit  $|\cdot \vec{r}_i$  und summieren über alle Teilchen.

$$\begin{aligned} \sum_i m_i (\ddot{\vec{r}}_i \cdot \vec{r}_i) &\stackrel{*1}{=} \underbrace{\frac{d}{dt} \sum_i m_i (\dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{r}_i)}_{= RM - \text{Verschwindet im Zeitlichen Mittel}} - \underbrace{\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^2}_{= 2T} \end{aligned}$$

Nun soll hier noch die Mathematische Äquivalenz von  $*_1$  gezeigt werden.

$$\frac{d}{dt} \sum_i m_i (\dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{r}_i) = \sum_i m_i \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{r}_i) = \sum_i m_i (\ddot{\vec{r}}_i \cdot \vec{r}_i + \dot{\vec{r}}_i^2) = \sum_i m_i (\ddot{\vec{r}}_i \cdot \vec{r}_i) + \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^2$$

Es gilt nun zu Zeigen, dass der Teil im Zeitlichen Mittel wirklich verschwindet.

Dazu schauen wir uns die Definition des zeitlichen Mittels einer Funktion  $f(t)$  an:

$$\langle f \rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t) dt$$

Wenn wir dieses auf den Term  $RM$  an.

$$\left\langle \frac{d}{dt} \sum_i m_i (\dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{r}_i) \right\rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \left[ \sum_i m_i (\dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{r}_i) \right]_0^\tau \rightarrow 0$$

Das Limit läuft allerdings nur gegen 0, wenn der Teil in den Eckigen Klammern eine Endlicher Term ist! Bei gebundenen Planetenbahnen ist das der Fall, bei Streuung NICHT.

Der Virialsatz besagt nun, dass die kinetische Energie im zeitlichen Mittel gleich dem halben Virial ist.

$$\langle T \rangle = \frac{1}{2} \left\langle \underbrace{\sum_i \nabla_i V \cdot \vec{r}_i}_{\text{Virial}} \right\rangle$$

Hier skippe ich nun eine Herleitung weil dumm

Spezialfall für homogene Potentiale:

$$\langle T \rangle = \frac{1}{2} k \langle V \rangle$$

Wobei  $k$  der grad des homogenen Potentials ist.

### 3.3 Zwei Teilchen Systeme

Achtung ab hier werde ich Vektoren auch mit der Notation des FETTDRUCKS kennzeichnen, also

$$\vec{r} = \mathbf{r} \neq r$$

Betrachten wir nun nicht mehr den Allgemein Fall sondern schauen uns Systeme mit zwei Teilchen an. Also  $N = 2$ .

Dazu müssen wir uns neue Koordinaten definieren. Wir brauchen "Absolute Koordinaten" und Relativkoordinaten zum Schwerpunkt.

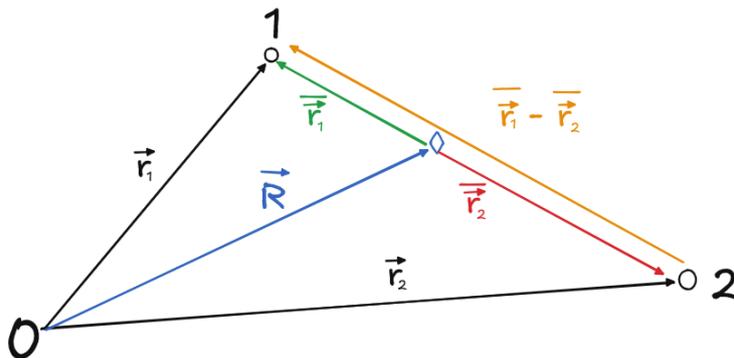


Figure 18: Koordinaten für 2N Systeme

Dabei ist das Große  $\mathbf{R}$  immer der Ortsvektor des Schwerpunktes (Im Laborsystem).

Vektoren mit einer Bar überm Kopf und der Farbe rot  $\vec{r}_i$  sind nun immer Vektoren im **Schwerpunktsystem** (im Diagramm oben ist das rot und grün).

Betrachten wir also einmal die Schwerpunktkoordinate  $\mathbf{R}$  Grundsätzlich gilt für die Schwerpunktskoordinate ja  $\frac{1}{M} \sum m_i r_i$ . Im Zweiteilchensystem wird dies vereinfacht zu:

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}$$

Nun betrachten wir von den Vektor, der sich zwischen Teilchen 2 und 1 aufspannt. Dieser ist äquivalent zum Orangene Vektor im Diagramm. Wir definieren diesen aber mit den Vektoren  $\mathbf{r}_i$  aus dem Laborsystem.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$$

Dann ist  $\mathbf{r}$  nun der Vektor zwischen den beiden Teilchen im Laborsystem.

Wir wollen nun die Laborsystemvektoren  $\mathbf{r}_i$  darstellen mithilfe der Relativkoordinaten  $\vec{r}_i$ . Dazu stellen wir zuerst um  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + \mathbf{r}_2$  und setzen das in die Gleichung für die Schwerpunktskoordinate ein.

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 (\mathbf{r} + \mathbf{r}_2) + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}$$

Dies stellen wir nach  $\mathbf{r}_2$  um und erhalten:

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{m_1}{M} \mathbf{r}$$

Dabei ist  $M = (m_1 + m_2)$ . Analog erhalten wir für  $\mathbf{r}_1$ .

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{m_2}{M} \mathbf{r}$$

Geometrisch erkennen wir nun: Wenn wir durch  $\mathbf{R}$  an den Schwerpunkt gelaufen sind, fehlt und noch der Vektor  $\vec{r}_1$  um, zum Punkt eins zu kommen, der durch  $\mathbf{r}$  beschrieben wird. Also muss aus vorherigen Formeln folgen:

$$\frac{m_2}{M} \mathbf{r} = \vec{r}_1, \quad \frac{m_1}{M} \mathbf{r} = \vec{r}_2$$

Wichtig ist nun zu erkennen, dass wir durch die Vektoren  $\mathbf{R}$  und  $\mathbf{r}$  auch die beiden Punkte  $\mathbf{r}_1$  und  $\mathbf{r}_2$  beschreiben können. Wenn wir also eine Bewegungsgleichung für die einzelnen Teilchen anschauen wollen, können wir uns zuerst die Globale Bewegung anschauen und danach die Relative bewegung zueinander.

Betrachten wir den Schwerpunktsatz für abgeschlossenen Systeme (also keine äußeren Kräfte).

$$M\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}^{ext} = \mathbf{0}$$

Betrachten wir nun die Relativbewegung, dazu schauen wir uns den Vektor zwischen den Teilchen an  $\mathbf{r}$  beziehungsweise seine Beschleunigung:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} &= \ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2 \quad | \quad \mathbf{r}_i = \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \\ &= \frac{\mathbf{F}_1}{m_1} - \frac{\mathbf{F}_2}{m_2} \quad | \quad \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{ext} + \sum_j^2 \mathbf{F}_{ij} \\ &= \frac{\mathbf{F}_1^{ext}}{m_1} - \frac{\mathbf{F}_2^{ext}}{m_2} + \frac{\mathbf{F}_{12}}{m_1} - \frac{\mathbf{F}_{21}}{m_2} \quad | \quad \mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} \\ &= \frac{\mathbf{F}_1^{ext}}{m_1} - \frac{\mathbf{F}_2^{ext}}{m_2} + \underbrace{\left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)}_{=1/\mu} \mathbf{F}_{12} \end{aligned}$$

Wir erkennen, wenn es keine externen Kräfte gibt, erhalten wir:

$$\mu\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_{12}$$

Wir erkennen, dass die Bewegungsgleichung der relativ koordinaten  $\mathbf{r}$  und der des Schwerpunktes  $\mathbf{R}$  nichts miteinander zu tun haben. Wir können also die Bewegungsgleichung des Schwerpunktes getrennt von der der Relativbewegung betrachten.

Dabei betrachten wir die Bewegungsgleichung der Relativbewegung auch als Ein-Teilchen mit der Masse  $\mu$ .

Wie sieht es um die kinetische Energie eines solches Zweiteilchensystems aus. Die ist die Summe der kinetischen Energien der Teilchen:

$$\begin{aligned} T &= \sum_i^2 m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 \quad | \quad \text{Def. der } \mathbf{r}_i \\ &= \frac{1}{2} m_1 \left( \dot{\mathbf{R}} + \frac{m_2}{M} \dot{\mathbf{r}} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left( \dot{\mathbf{R}} - \frac{m_1}{M} \dot{\mathbf{r}} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} m_1 \left( \dot{\mathbf{R}}^2 + 2\dot{\mathbf{R}} \frac{m_2}{M} \dot{\mathbf{r}} + \frac{m_2^2}{M^2} \dot{\mathbf{r}}^2 \right) + \frac{1}{2} m_2 \left( \dot{\mathbf{R}}^2 - 2\dot{\mathbf{R}} \frac{m_1}{M} \dot{\mathbf{r}} + \frac{m_1^2}{M^2} \dot{\mathbf{r}}^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} m_1 \dot{\mathbf{R}}^2 + m_1 \dot{\mathbf{R}} \frac{m_2}{M} \dot{\mathbf{r}} + \frac{1}{2} m_1 \frac{m_2^2}{M^2} \dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\mathbf{R}}^2 - m_2 \dot{\mathbf{R}} \frac{m_1}{M} \dot{\mathbf{r}} + \frac{1}{2} m_2 \frac{m_1^2}{M^2} \dot{\mathbf{r}}^2 \\ &= \frac{1}{2} m_1 \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2} m_1 \frac{m_2^2}{M^2} \dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2} m_2 \frac{m_1^2}{M^2} \dot{\mathbf{r}}^2 \\ &= \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 \left( m_1 \frac{m_2^2}{M^2} + m_2 \frac{m_1^2}{M^2} \right) \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} M \dot{\mathbf{R}}^2}_{T_s} + \underbrace{\frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{r}}^2}_{T_r} \end{aligned}$$

Man erkennt also, dass die kinetische Energie sich durch unsere Relativkoordinaten auch schreiben lassen, als die kinetische Energie des Schwerpunktes und der relativen kinetischen Energie.

Gleiches gilt auch für den Schwerpunkt:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_s + \mathbf{L}_r$$

Dabei ist:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_s &= M(\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}}) = \mathbf{R} \times \mathbf{P} \\ \mathbf{L}_r &= \sum_i^2 m_i (\bar{\mathbf{r}}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i) \stackrel{\text{Def von } \bar{\mathbf{r}}_i}{=} \mu(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \end{aligned}$$

Die potentielle Energie eines zweiteilchen Systems ist wie zu erwarten das Paarpotential der beiden Teilchen aufeinander:

$$V = V_{12}$$

### 3.3.1 Bertrand Theorem

Stabile, geschlossene Bahnkurven gibt es nur für die Potentiale:

$$-\frac{\alpha}{r} \text{ und } \frac{1}{2}kr^2$$

### 3.4 Zwei Teilchen Streuung

Wenn zwei Teilchen aufeinander zulaufen, wechselwirken diese für eine begrenzte Zeit und laufen dann wieder voneinander weg (wenn sie nicht auf eine gebundene Bahn gezwungen werden).

Dabei wollen wir zwei verschiedene Bezugssysteme nutzen:

1. **Laborsystem**  $\Sigma_L$ . Hier sind die Vektoren schwarz und ohne Strich überm Kopf:  $\mathbf{p}_i$
2. **Schwerpunktsystem**  $\Sigma_S$ . Das ist unser Relativsystem zum Schwerpunkt. Hier sind die Vektoren rot und haben ein Bar überm Kopf:  $\bar{\mathbf{p}}_i$

#### 3.4.1 Notation

- Vektor im Laborsystem vor dem Stoß:  $\mathbf{p}_i$
- Vektor im Schwerpunktsystem vor dem Stoß:  $\bar{\mathbf{p}}_i$
- Vektor im Laborsystem nach dem Stoß:  $\mathbf{p}'_i$
- Vektor im Schwerpunktsystem nach dem Stoß:  $\bar{\mathbf{p}}'_i$

Ohne das Potential der zwei Teilchen zu kennen, können wir keine Lösung angeben, sondern uns erstmal Erhaltungssätze anschauen.

#### 3.4.2 Impulserhaltung

Weil wir keine äußeren Kräfte haben, bzw. das jetzt für den zweikörperstoß ausschließen, ist der Impuls erhalten.

$$\Sigma_L : \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 = \text{const}$$

Also die Summe der Impulse im Laborsystem sind vor und nach dem Stoß erhalten.

Ähnliches gilt im Schwerpunktsystem:

$$\Sigma_S : \bar{\mathbf{p}}_1 + \bar{\mathbf{p}}_2 = \bar{\mathbf{p}}'_1 + \bar{\mathbf{p}}'_2 = 0$$

Hier ist die Summe der Impulse immer Null, weil der Schwerpunkt nur die Impulse (Geschwindigkeiten) relativ zu ihm sieht.

$$\bar{\mathbf{p}}_1 = -\bar{\mathbf{p}}_2 \text{ und } \bar{\mathbf{p}}'_1 = -\bar{\mathbf{p}}'_2$$

Man kann sich folgendes Bild dazu machen:

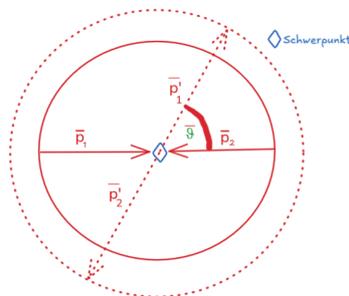


Figure 19: Impulse im Schwerpunktsystem

Dabei ist  $\vartheta$  der Streuwinkel im Schwerpunktsystem. Man kann erkennen, dass sich die Impulse hier gerade aufgeben.

### 3.4.3 Energieerhaltung bei einem 2K Stoß

Zuerst müssen wir uns angewöhnen für solche Probleme immer den Impuls als Größe anzuschauen und nicht über die Geschwindigkeit zu gehen.

$$T = \frac{m}{2} \mathbf{v}^2 \quad | \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{m}$$

$$= \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$$

Wir können also die Gesamtenergie im Laborsystem schreiben als:

$$\Sigma_L : \sum_i \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m_i} = \sum_i \frac{\mathbf{p}'_i{}^2}{2m_i} (+Q)$$

Dabei ist Q ein Energieübertrag beim Stoßen, das kann z.B. bei inelastischer Streuung passieren.

Wir gehen aber erstmal von einer elastischen Streuung aus, dann ist hier  $Q = 0$ . Genauer bedeutet das Energieerhaltung bei konservativen Kräften, keine zusätzlichen Freiheitsgrade wie An- oder Abregung der Teilchen.

Im Schwerpunktsystem sieht das genauso aus:

$$\Sigma_S : \sum_i \frac{\bar{\mathbf{p}}_i^2}{2m_i} = \sum_i \frac{\bar{\mathbf{p}}'_i{}^2}{2m_i} + \bar{Q}$$

Dabei wäre der Energieübertrag  $Q = \bar{Q}$

Betrachten wir die relative kinetische Energie (gehen dafür also ins Schwerpunktsystem):

$$T_r = \frac{\bar{\mathbf{p}}_1^2}{2m_1} + \frac{\bar{\mathbf{p}}_2^2}{2m_2} \quad | \star_1$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \bar{\mathbf{p}}_i^2 \quad | \star_2$$

$$= \frac{\bar{\mathbf{p}}_i^2}{2\mu} \quad | \star_3$$

$$\Rightarrow \frac{\bar{\mathbf{p}}_i^2}{2\mu} = \frac{\bar{\mathbf{p}}'_i{}^2}{2\mu}$$

\*<sub>1</sub> Wir wissen, dass die Summe der Impulse im  $\Sigma_S$  Null ergeben, also die Beträge der Vektoren gleich sind und damit auch das Quadrat gleich ist. (Impulssatz)

\*<sub>2</sub> Hier ist es egal, ob  $i = 1$  oder  $i = 2$ , weils gleich ist.

\*<sub>3</sub> Folgt aus der Energieerhaltung, da  $\bar{Q} = 0$

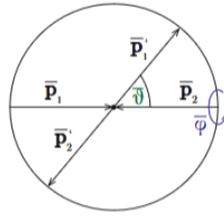
Aufgrund der Energieerhaltung können wir uns die Energie zu jedem Zeitpunkt anschauen, und eben genau einen Zeitpunkt wählen, wo  $V = 0$ , also die Gesamte Energie des Systems die kinetische Energie der Teilchen ist

Hieraus erkennen wir, dass die Beträge vor und nach dem Stoß der Impulse auch identisch sein müssen.

$$|\bar{\mathbf{p}}_i| = |\bar{\mathbf{p}}'_i|$$

Nun ist das System schon auf zwei Unbekannte reduziert worden.

Wir kennen die Impulse, aber nicht unter welchen zwei Winkeln diese austreten nach der Streuung.



Alle Vektoren auf der gleichen Kugelschale, aber zwei unbekannte Winkel

$\bar{\vartheta}$ : Streuwinkel in  $\Sigma_s$

$\bar{\varphi}$ : Azimutalwinkel

Figure 20: Impulsvektoren gleich, weil Energieerhaltung

### 3.4.4 Ruhendes Target

Schauen wir uns weiterhin den häufigen Fall eines ruhenden Targets an, also das  $\mathbf{r}_2 = 0$  ist.

Allgemein können wir schreiben, dass der Ortsvektor  $\mathbf{r}'_1$  nach dem Stoß, einfach der Schwerpunktsvektor plus die Relative Bewegung zum Schwerpunkt ist. Also:

$$\mathbf{r}'_1 = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_1$$

Damit ergibt sich für den Impuls des ersten Teilchens nach dem Stoß:

$$\mathbf{p}'_1 = m_1 \left( \dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{r}}'_1 \right) \stackrel{*1}{=} \frac{m_1}{M} \mathbf{p}_1 + \bar{\mathbf{p}}'_1$$

Dabei ist:

$$*1 : \mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{M} \stackrel{r_2=0}{=} \frac{m_1}{M} \mathbf{r}_1$$

Betrachten wir den Impuls des Zweiten Teilchens nach dem Stoß. Wir wissen außerdem, dass durch die Impulserhaltung gilt  $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2$

$$\mathbf{p}'_2 = \mathbf{p}_1 + \underbrace{\mathbf{p}_2}_{=0} - \mathbf{p}'_1 = \mathbf{p}_1 - \left( \frac{m_1}{M} \mathbf{p}_1 + \bar{\mathbf{p}}'_1 \right) = \underbrace{\frac{m_2}{M} \mathbf{p}_1}_{\bar{\mathbf{p}}_1} - \bar{\mathbf{p}}'_1$$

Entscheidend für die Endimpulse im Laborsystem ist also der Impuls eines Teilchens nach dem Stoß im Schwerpunktsystem.

Betrachten wir nun noch die Energieerhaltung, von der wir wissen, dass die Beträge der Schwerpunktsystemimpulse identisch sind, so erhalten wir:

$$|\bar{\mathbf{p}}'_1| = |\bar{\mathbf{p}}_1| \stackrel{\bar{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{R}}{=} |m_1 (\dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{R}})| \stackrel{*1}{=} \left| \mathbf{p}_1 - \frac{m_1}{M} \mathbf{p}_1 \right| = \frac{m_2}{M} |\mathbf{p}_1|$$

Der Impuls nach dem Stoß im Schwerpunktsystem hängt also von den Massenverhältnissen und dem Anfangsimpuls ab. Gilt aber nur für ein ruhendes Target.

### 3.4.5 Impulsanalyse

Um die jeweiligen Impulse besser verstehen zu können, gibt es die Methode des Impulsdreiecks.

Achtung auch hier sind wir noch im Fall des ruhenden Targets

Dabei starten wir damit, den Impulsvektor des ersten Teilches einzuzichnen, und die Impulsvektoren nach dem Stoß, die nach dem Impulssatz ja in Summe dem Anfangsvektor entsprechen müssen.

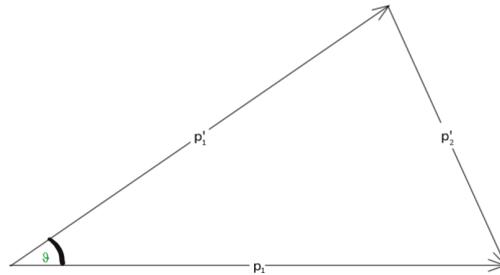


Figure 21: Impulsanalyse Step 1

Für ein ruhendes Target haben wir gesehen, dass ein Anteil des "Anfangsvektor"  $\mathbf{p}_1$  gerade  $\bar{\mathbf{p}}_1$  ist. Desweiteren wissen wir, dass  $\mathbf{p}'_2 = \bar{\mathbf{p}}_1 - \mathbf{p}'_1$  ist. Also können wir diese Vektoren auch schon einzeichnen:

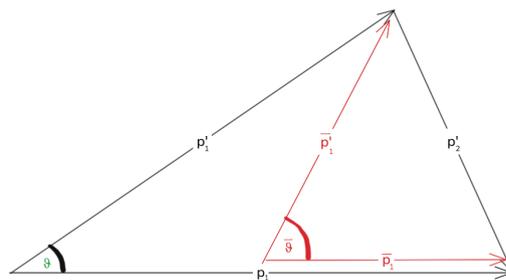


Figure 22: Impulsanalyse Step 2

Nun können wir noch den Fehlenden Anteil von den Vektor  $\mathbf{p}_1$  einzeichnen und mehrere Hilfsvariablen, damit wir aus diesen Geometrischen Beziehungen eine Formel für den Streuwinkel  $\vartheta$  bekommen.

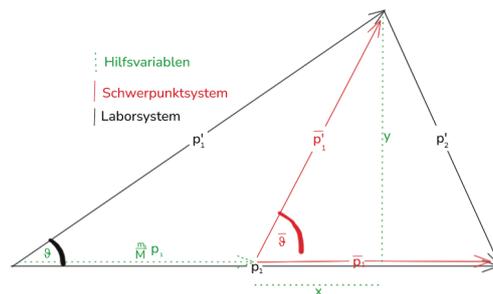


Figure 23: Impulsanalyse Step 3

Es gilt:

$$\sin \bar{\vartheta} = \frac{y}{|\mathbf{p}'_1|} \Rightarrow y = \sin \bar{\vartheta} \cdot |\mathbf{p}'_1|$$

$$\cos \bar{\vartheta} = \frac{x}{|\mathbf{p}'_1|} \Rightarrow x = \cos \bar{\vartheta} \cdot |\mathbf{p}'_1|$$



### 3.4.6 Streuung am 1/r Potential

Die bisher betrachteten Rechnungen zur Streuung waren möglich ohne ein konkretes Potential zu kennen. Weiter kommen wir nun aber nur mit einem konkretem Potential und wählen  $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$ . D.h. die Bahnen sind Kegelschnitte (wie bereits in den vorherigen Kapiteln gezeigt)

Aufgrund der Energieerhaltung und der Tatsache dass wir nun eine Anfangsgeschwindigkeit haben ist die Energie positiv.

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 > 0$$

Die Energie  $E$  entscheidet, wie sich das Teilchen bewegt:

Gebundene Zustände ( $E < 0$ ): Wenn  $E < 0$ , dominiert der negative Term  $-\frac{\alpha}{r}$ . Das bedeutet, dass das Teilchen nicht genug kinetische Energie hat, um dem Potential zu entkommen. Das Teilchen bleibt in einem Bereich um die Quelle des Potentials gefangen. Es bewegt sich auf einer geschlossenen Bahn (z. B. einer elliptischen Bahn im Gravitationsfall). Beispiele: Elektronen in einem Atom (Coulomb-Potential), Planeten, die sich um die Sonne bewegen (Gravitationspotential).

Ungebundene Zustände (Streuung,  $E > 0$ ): Wenn  $E > 0$ , überwiegt die kinetische Energie. Das Teilchen hat genug Energie, um dem Potential zu entkommen, da es nicht mehr durch das  $-\frac{\alpha}{r}$ -Potential vollständig eingefangen wird. Das Teilchen bewegt sich auf einer offenen Bahn (z. B. eine Hyperbel). Beispiele: Ein Komet, der von der Sonne angezogen wird, aber eine so hohe Geschwindigkeit hat, dass er wieder in den Weltraum entkommt.

Grenzfall ( $E = 0$ ): Das ist der Übergangspunkt zwischen gebundenen und ungebundenen Zuständen. Das Teilchen hat gerade so viel Energie, dass es dem Potential entkommen kann, und bewegt sich auf einer Parabelbahn.

Im betrachteten Fall erhalten wir also Hyperbeln. Und wieder für ein ruhendes Target.

Der Stoßparameter  $b$  ist der Abstand, um den das einfallende Teilchen das Target verfehlen würde, wenn es keine Streuung gäbe.

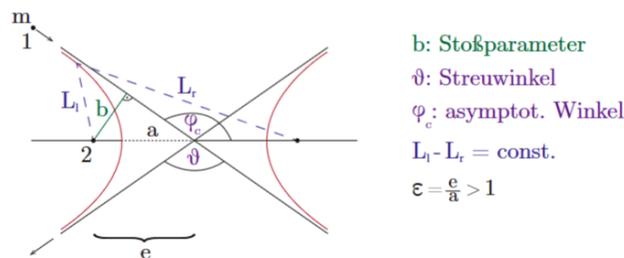


Figure 24: 2K Streuung am 1/r-Potential

Bei Hyperbeln ist  $L_1 - L_r = konst$ , bei Ellipsen ist die Summe Konstant.

Wir haben bei den Keplerbahnen bereits gesehen, dass sich die Bewegung beschreiben lässt mit:

$$r = \frac{k}{1 + \epsilon \cos \varphi}$$

Dabei ist hier nun  $\epsilon = \frac{e}{a} > 0$ . Rechenrreich können wir das so zeigen, denn für  $\epsilon$  gilt:

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{\alpha^2 \mu}}$$

Und dies ist  $> 1$ , weil die Energie  $E$  positiv ist.

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{e}{a} & e^2 + b^2 &= a^2 & a &= -\frac{\alpha}{2E} & b &= \frac{L}{\sqrt{-2mE}} \\ e &= \sqrt{a^2 - b^2} & &= \sqrt{\frac{\alpha^2}{4E^2} - \frac{L^2}{-2mE}} \\ & & &= \sqrt{\frac{\alpha^2 m + 2L^2 E}{4mE^2}} \\ \epsilon &= \frac{e}{a} & &= \frac{\sqrt{\frac{\alpha^2 m + 2L^2 E}{4mE^2}}}{-\frac{\alpha}{2E}} & &= \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{\alpha^2 m}} \end{aligned}$$

Weiternoch können wir erkennen, da der Drehimpuls konstant ist, wir uns den Zeitpunkt anschauen können, indem das Teilchen im Rechten Winkel vorbeifliegen würde. Es ergibt sich für den Drehimpuls des Systems also:

$$L = b \cdot \mu v$$

Dabei ist  $v$  die Anfangsgeschwindigkeit des Teilchens

Starten wir mit der Kegelschnittformel:

$$r = \frac{k}{1 + \epsilon \cos \varphi}$$

Uns stellen diese nach  $\varphi$  um und schicken  $r \rightarrow \infty$  so erhalten wir:

$$\varphi = \arccos\left(\left(\frac{k}{r} - 1\right) \frac{1}{\epsilon}\right)$$

$$\varphi_c \stackrel{r \rightarrow \infty}{=} \arccos\left(-\frac{1}{\epsilon}\right)$$

Dieser Winkel hängt mit dem Streuwinkel zusammen.

$$\vartheta + \pi = 2\varphi_c$$

Leider habe ich keine Ahnung warum das gelten soll

Aber darauf lässt sich dann schreiben:

$$\sin \frac{\vartheta}{2} = \sin\left(\varphi_c - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos \varphi_c = \frac{1}{\epsilon}$$

Das setzen wir nun mit der Formel für  $\epsilon$  gleich und setzen Drehimpuls und Kinetische Energie ein. Und stellen direkt nach  $b^2$  um. (Ich überspringe viele Schritte, da Schwarz und Nölting auch nur so kurz im Skript haben und es demnach hoffentlich wenig von Bedeutung sein wird).

$$b^2 = \left(\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right)} - 1\right) \cdot \frac{\alpha^2}{(\mu v^2)^2}$$

Die Bewegungen lassen sich in den verschiedenen Systemen so visualisieren:

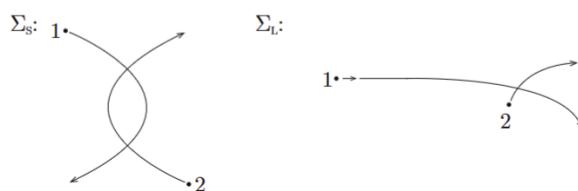


Figure 25: Hyperbelbahnen

### 3.4.7 Streuquerschnitt

Wir haben nun eine Formel für die Streuwinkel in Abhängigkeit des Stoßparameters und des Potentials. Wir können also mithilfe der Experimentelle bestimmten Streuwinkel auf die Potentiale zurückschließen. Experimentell werden in der Regel sogenannte Streuquerschnitte gemessen. Typischerweise hat man eine homogene Verteilung über den Strahl, d.h. die Stoßparameter sind nur entsprechend der Geometrie des Strahls verteilt. Deshalb skalieren alle Teilchenzahlen proportional zum eingeschossenen Teilchenfluss, also der Zahl der Teilchen, die pro Zeit und pro Querschnittsfläche eingeschossen werden, und alles kann auf ein Teilchen normiert werden. Zur Beschreibung des eingeschossenen Strahls sind zwei-dimensionale Polarkoordinaten angemessen. Nach dem Stoss fliegen die Teilchen in alle Richtungen weg, d.h. hier sind die Kugelkoordinaten angemessen. Wenn der Strahl in z-Richtung eingeschossen wird, dann ist der Streuwinkel gerade der Polarwinkel  $\vartheta$  der Kugelkoordinaten. Jetzt muss man Größen definieren, die wiedergeben, wie der ebene Strahl in eine kugelförmige Verteilung aufgefächert wird. Wir nehmen ein rotationssymmetrisches Potential an, d.h. es gibt nur einen relevanten Winkel, nämlich den Streuwinkel  $\vartheta$ , der wiederum eindeutig aus dem Stoßparameter  $b$  folgt. Allerdings messen wir die gestreuten Teilchen nicht im ganzen Ring, der zu einem Streuwinkel gehört, sondern nur in einem bestimmten Raumwinkel  $d\Omega$  (also dem Raumkegel, der vom Detektor abgedeckt wird) Die Definition des Streuquerschnitts ist also wie folgt:

$$d\sigma = \frac{\text{Anzahl der Teilchen, die Pro Zeit im Raumwinkel } d\Omega \text{ gestreut werden}}{\text{Anzahl der Teilchen die Pro Zeit und Fläche Einfallen}}$$

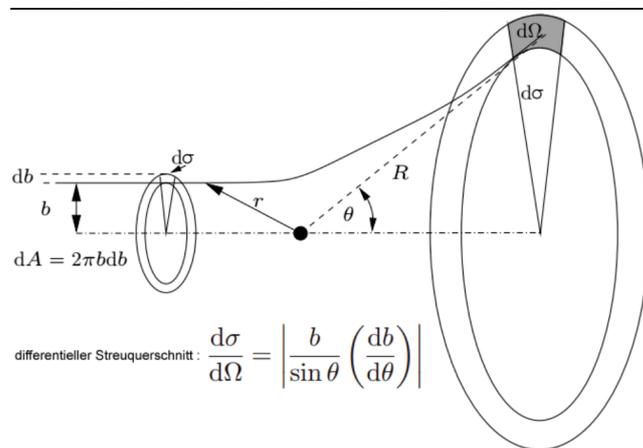


Figure 26: Visualisierung

$d\sigma$  ist in Polarkoordinaten angegeben, also können wir  $d\sigma$  auch schreiben als:

$$d\sigma = b \cdot db \cdot d\varphi \stackrel{\text{Trick}}{=} b \cdot \frac{db}{d\vartheta} d\vartheta \cdot d\varphi$$

Und  $d\Omega$  können wir mithilfe von Kugelkoordinaten schreiben (den Radius nicht betrachtet)

$$d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$$

Damit können wir nun den Differentiellen Streuquerschnitt definieren:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = b \frac{db}{d\vartheta} \frac{1}{\sin \vartheta} \stackrel{?}{=} \frac{1}{2} \frac{db^2}{d\vartheta} \frac{1}{\sin \vartheta}$$

Nun setzen wir unser  $b^2$  ein, leiten ab und schreiben zusammen:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2\mu^2 v^4} \frac{\cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}{\sin^3\left(\frac{\vartheta}{2}\right)} \frac{1}{\sin \vartheta}$$

Wir können umschreiben mithilfe von:

$$\sin \vartheta = \sin\left(\frac{\vartheta}{2} + \frac{\vartheta}{2}\right) = 2 \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta}{2}$$

Es folgt letztendlich:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4\mu^2 v^4} \frac{1}{\sin^4\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}$$

**Interpretation:**

$\frac{d\sigma}{d\Omega}$  hat die Dimension einer Fläche. Ein Teilchen, das durch diese Fläche tritt, wird in den gegebenen Streuwinkel gestreut. Je größer  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ , desto stärker ist die Streuung (für diesen Streuwinkel).

### 3.5 Gekoppelte Schwingung

Mehrteilchensysteme mit Massen und Federn sind wichtige Modelle für Molekül- und Festkörperphysik. Ohne Dämpfung kommt es zu Schwingungen wie beim harmonischen Oszillator.

Wir betrachten hier nun nur zwei gekoppelte Massen in einer Dimension:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -k_1 x_1 - k_{12}(x_1 - x_2) \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -k_2 x_2 - k_{12}(x_1 - x_2) \end{aligned}$$

Wir wissen, es ergeben sich Schwingungen, also benutzen wir den Ansatz:

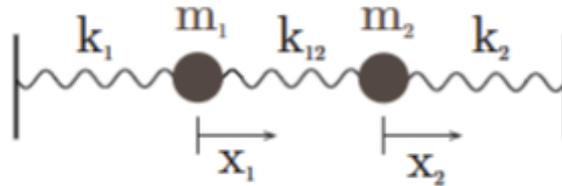


Figure 27: Gekoppelte Massepunkte

$$x_i = \alpha_i \cos(\omega t)$$

Einsetzen und kürzen mit  $\cos(\omega t)$  liefert.

$$\begin{aligned} -m_1 \omega^2 \alpha_1 &= -k_1 \alpha_1 - k_{12}(\alpha_1 - \alpha_2) \\ -m_2 \omega^2 \alpha_2 &= -k_2 \alpha_2 - k_{12}(\alpha_1 - \alpha_2) \end{aligned}$$

Das können wir auch umschreiben, sodass die Lösugen Null ergeben:

$$\begin{aligned} 0 &= k_1 \alpha_1 + k_{12} \alpha_1 - m_1 \omega^2 \alpha_1 - k_{12} \alpha_2 \\ 0 &= k_2 \alpha_2 + k_{12} \alpha_2 - m_2 \omega^2 \alpha_2 - k_{12} \alpha_1 \end{aligned}$$

Wir erkennen die Möglichkeit das in Matrixschreibweise zu fassen.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} k_1 + k_{12} - m_1 \omega^2 & -k_{12} \\ -k_{12} & k_2 + k_{12} - m_2 \omega^2 \end{pmatrix}}_{:=A} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Falls die sogenannte Säkulärdeterminante verschwindet, d.h.  $\det = 0$ , besitzt das Gleichungssystem eine nicht-triviale Lösung. Das entspricht einer quadratischen Gleichung für  $\omega^2$ , welche auf zwei Eigenfrequenzen  $\omega_{\pm}$  führt. Zu jeder Eigenfrequenz gehört eine Eigenmode.

D.h. wir muessen für nicht triviale Lösungen die Determinante dieser Matrix null setzen.

Wir betrachten ab sofort einen symetrischen Fall, indem  $k_1 = k_2 = k$  und  $m_1 = m_2 = m$

Das führt zu folgender Gleichung:

$$\begin{aligned} 0 &= \det A \\ &= (k + k_{12} - m\omega^2)(k + k_{12} - m\omega^2) - k_{12}^2 \\ &= m^2(\omega^2)^2 - (2mk + 2mk_{12})\omega^2 + k^2 + 2kk_{12} \end{aligned}$$

Mit der abc Formel folgt dann:

$$\omega_{-}^2 = \frac{k}{m}, \quad \omega_{+}^2 = \frac{k + 2k_{12}}{m}$$

Setzen wir diese nun ein, so erhalten wir die verschiedenen Moden und dazugehörige Amplitudenvektoren  $((\alpha_1, \alpha_2)^t)$ .

### 1. Mode

Die erste Mode wird durch die erste Frequenz gegeben:  $\omega_-^2 = \frac{k}{m}$ , daraus folgt nach Einsetzen:

$$\begin{pmatrix} k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es folgt:

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Das entspricht einer gleichsinnigen Schwingung der beiden Massen. Dabei wird die koppelnde Feder nicht belastet, das ist also eine triviale Mode.

#### 1. Mode



gleichsinnige Schwingung  
(die mittlere Feder wird nicht belastet)

### 2. Mode

Wir gehen ident vor für die Frequenz:  $\omega_+^2 = \frac{k+2k_{12}}{m}$  Und erhalten für den Amplitudenvektor:

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Das entspricht einer gegensinnigen Schwingung der beiden Massen. Dabei wird die koppelnde Feder periodisch gedehnt und gestaucht. Die Frequenz dieser Mode ist höher.

#### 2. Mode



gegensinnige Schwingung

### Allgemeine Lösung

Die allgemeine Lösung mit vier Parametern, die durch die Anfangsbedingungen festgelegt sind, lautet:

$$x_1(t) = a_- \cos(\omega_- t) + b_- \sin(\omega_- t) + a_+ \cos(\omega_+ t) + b_+ \sin(\omega_+ t)$$

$$x_2(t) = a_- \cos(\omega_- t) + b_- \sin(\omega_- t) - a_+ \cos(\omega_+ t) - b_+ \sin(\omega_+ t)$$